Çözüm. Önce X noktası, merkezi O noktasında olan halkanın içinde ise, O noktasının da merkezi X noktasında olan aynı büyüklükteki halkanın içinde olduğunu kaydedelim. Bundan dolayı dairenin noktalarından bir tanesinin, merkezleri verilmiş noktalarda olan bu tip halkalardan en az 10'u ile örtüldüğünü ispatlamak yeter. Ele aldığımız halkalar, yarıçapı $16 + 3 = 19$ olan 361π alanlı dairenin içindedirler. Geriye $9(361\pi) = 3249\pi$ ve halkaların alanları toplamının $650(5\pi) = 3250\pi$ olduğunu görmek kalır. □

Örnek 5. *(Avusturya-Polonya 1978 yılı öğrenci yarışması.) Her biri 40 elemanlı 1978 tane küme verilmiştir. Bu kümelerden her ikisinin tam bir tane ortak elemanı vardır. 1978 kümenin ortak elemanı olduğunu ispatlayınız.*

Çözüm. A kümesi 1978 kümeden herhangi biri olsun. Bu kümenin diğer 1977 küme ile kesişimi boş değildir ve buna göre bu kümelerden en az 50 tanesinin elemanı olan $a \in A$ vardır. Gerçekten, A kümesinin her elemanı en fazla 49 kümenin ortak elemanı ise, toplam küme sayısı $40 \cdot 49 = 1960$ sayısından fazla değildir. a'nın ortak elemanı bulunduğu kümeler $A, A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ olsun. a elemanının 1978 kümeden geriye kalan her B kümesinin de elemanı olduğunu ispatlayalım. Gerçekten $A, A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ kümelerinin herhangi ikisinin a'dan farklı ortak elemanı yoktur, çünkü her iki kümenin tam bir tane ortak elemanı vardır. $a \notin B$ olduğunu varsayalım. O halde B kümesinin her $A, A_1, A_2, \cdots, A_{50}$ kümesi ile a'dan farklı ortak elemanı vardır ve bu elemanlar farklıdır. Bundan dolayı B kümesinin eleman sayısı en az 51'dir; bu ise olamaz. Demek ki a her kümenin elemanıdır. □

Örnek 6. *m ve n kendi aralarında asal tamsayılar olsun. $m^k - 1$ sayısı n sayısına tam olarak bölünmesini sağlayan bir k tamsayısının varlığını ispatlayınız.*

Çözüm. $n + 1$ tane olan $m, m^2, \ldots, m^{n+1}$ sayıları içinde n ile bölümlerinden kalanları eşit olan iki sayı vardır ve onların farkı n'nin katıdır; diyelim bunlar m^l ve m^t'dir. O halde $m^l - m^t = an$ veya $m^t(m^{l-t} - 1) = an$. $(m, n) = 1$ olduğundan, $(m^t, n) = 1$ ve demek ki $m^{l-t} - 1$ sayısı n'nin katıdır; yani $k = l - t$ sayısı aranan sayıdır. □

KAYNAKÇA

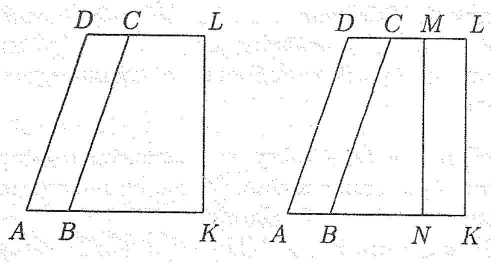
[1] A. Erkip, *Çekmeceler, Çoraplar ve Matematik Problemleri*, *Matematik Dünyası*, **2**, sayı 2, 22–24 (1992).

MATEMATİKTE TAMAMLAMA

Recep Yücesan *

Konumuza eski bir tamamlama sorusuyla başlayalım. Yaşlı bir adam vasiyetinde üç oğluna deve sürüsünü şöyle paylaştırıyor: En büyük oğluna sürünün yarısını, ortancasına üçte birini ve en küçüğüne de dokuzda birini ayırıyor. Yaşlı adam ölüyor ve geride 17 devesi kalıyor. Oğulları normal olarak taksime başlıyorlar, fakat 17 sayısını 2, 3 ve 9'a tam bölemeyince ne yapacaklarını şaşırıyorlar. Sonra bir bilge kişiye başvuruyorlar. Bilge kişi yaşlı adamın vasiyetine göre develeri taksim ediyor. Ama nasıl?

Bu şaşırtıcı bilmece ile beyninizi fazla zorlamayın. Bu sadece bir şaka, çünkü bilge kişi kendi devesini sürüye katıyor. Sonra vasiyetnamedeki gibi dağıtım yapıyor. Geriye $(13 - 9 - 6 - 2 = 1)$ kendi devesi kalıyor.



* Özel Van Serhat Fen Lisesi matematik öğretmeni

Bir de şekildeki $ABCD$ paralelkenarını düşünelim ve buna $CBKL$ yamuğunu ekleyelim. Yamuğun tabanları olan $[BK]$ ve $[CL]$, $[AB]$ ve $[DC]$'nin uzantıları olup $[KL]$ ile diktirler. Şimdi $BKLC$ yamuğunu $[BC]$ ile $[AD]$ çakışana kadar sola kaydıralım. $[KL]$'nin yeni yeri $[NM]$ olur. Yamuğu kesip çıkarttığımızda geriye $ABCD$ ile aynı alana sahip $KLMN$ dikdörgeni kalır. Fakat bu alan $(|NK|\cdot|KL|)$ paralelkenarın alanının aynısıdır! ($|NK|$ uzunluğu paralelkenarın $|AB|$ kenarının uzunluğuna ve $|KL$ de onun yüksekliğine eşittir.)

Şimdi tamamlamanın cebirdeki kullanımlarını inceleyelim.

Tam Kareye Tamamlama

Ekleme ve çıkarma tekniği cebir açılımlarında önemli bir yer tutar. Çarpanlara ayırmada ekleyip çıkarmak suretiyle toplamın veya farkın parantez karesi elde edilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} u^2+v^2 &= u^2+v^2+2uv-2uv \\ &= (u+v)^2-2uv, \end{aligned}$$

ve aynı şekilde $u^2+v^2=(u-v)^2+2uv$ elde edilir.

İkinci derece polinom denklemlerinin çözümünü veren formül de tam kareye tamamlama yoluyla elde edilir. $x^2+px+q=0$ ise, denkleme $p^2/4$ ekleyip çıkartıp kareye tamamlar ve sonra çarpanlara ayırırız:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4} \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2-4q}{4}\right) \\ &= \left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}\right). \end{aligned}$$

Bu eşitlikten kökler

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek. *$x^4+ux-1=0$ eşitliğini çözünüz.*

Çözüm. İfadeye $2x^2+1$'i ekleyip çıkartarak tam kareye benzetelim:

$$\begin{aligned} x^4+4x-1 &= x^4+2x^2+1-2x^2+4x-2 \\ &= (x^2+1)^2-2(x-1)^2=0. \end{aligned}$$

Buradan $x^2+1=\mp\sqrt{2}(x-1)$ elde ederiz. Bu ise

$$x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$$

veya

$$x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0$$

demektir. Bu eşitlikleri çözersek,

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\mp\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\mp i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}$$

çıkar. Bilindiği gibi $i=\sqrt{-1}$ demektir. □

Örnek. *n'nin hangi pozitif tamsayı değeri için n^4+4^n bir asal sayı olur?*

Çözüm. Sadece $n=1$ için. Eğer n çift ise, n^4+4^n zaten çifttir. Eğer $n=2k+1$ ise, ifademiz $2^{n+1}n^2$ eklenip çıkartılarak şu şekilde çarpanlarına ayrılır:

$$\begin{aligned} n^4+2^{2n} &= n^4+2n^2 2^n+2^{2n}-2^{n+1}n^2 \\ &= (n^2+2^n)^2-(2^{k+1}n)^2 \\ &= (n^2+2^n-2^{k+1}n)(n^2+2^n+2^{k+1}n). \end{aligned}$$

İkinci çarpan her zaman birinci çarpandan büyüktür. Birincisi $n>1$ için her zaman pozitiftir, çünkü $n^2+2^n\geq 2\sqrt{n^2 2^n}>n2^{k+1}$'dir. □

n^4+4 sayısının asallık koşullarını incelemeyi okuyuculara bırakıyoruz.

Örnek. *x^4+bx^2+c polinomunu ikinci dereceden çarpanlarına ayırınız.*

Çözüm. Eğer $\Delta=b^2-4c\geq 0$ ise,

$$x^4+bx^2+c=(x^2-y_1)(x^2-y_2)$$

yazılabilir. Buradaki y_1 ve y_2'ler $y^2+by+c=0$ denkleminin kökleridir. Eğer $\Delta<0$ ise, $2\sqrt{c}x^2$ çıkartıp eklenerek,

$$\begin{aligned} x^4+bx^2+c &= x^4+2\sqrt{c}x^2+c+(b-2\sqrt{c})x^2 \\ &= (x^2+\sqrt{c})^2-(2\sqrt{c-b})x^2 \\ &= (x^2+\sqrt{c}-\sqrt{2\sqrt{c-bx}}) \\ &\quad\cdot(x^2+\sqrt{c}+\sqrt{2\sqrt{c-bx}}) \end{aligned}$$

bulunur. □

x^4+a^4 ve $x^4-a^2x^2+a^4$ ifadelerinin çarpanlara ayrılmış halleri özellikle basittir.

Örnek. *$r = a^{10} + a^5 + 1$ ifadesini tamsayı katsayılı iki polinomun çarpımı şeklinde yazınız.*

Çözüm. Önce a, sonra da a^2 çıkartıp eklenerek,

$$\begin{aligned} r &= a^{10} - a + a^5 + a + 1 \\ &= a(a^9 - 1) + a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 \\ &= a(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1) + a^2(a^3 - 1) \\ &\quad + a^2 + a + 1 \\ &= a(a-1)(a^2 + a + 1)(a^6 + a^3 + 1) \\ &\quad + a^2(a-1)(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 \\ &= (a^2 + a + 1) \\ &\quad \cdot [(a^2 - a)(a^6 + a^3 + 1) + a^2(a-1) + 1] \\ &= (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Dikkat edilirse, $a^5 + a + 1$ polinomunu da arada çarpanlarına ayırıverdik. $a^8 + a + 1$ polinomunu da aynı yolla çarpanlara ayırırız. Eklenip çıkartılacak terimi bulmayı okuyuculara bırakıyoruz.

Çarpma-Bölme

Şimdiye kadar toplama ve çıkarma üzerine işlem yaptık. Diğer bir kullanışlı ters işlem ikilisi de çarpma ve bölmedir.

Örnek. *$S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\cdots 11}_{n \text{ tane}}$ toplamını bulunuz.*

Çözüm. Önce 9 ile çarpıp, sonra 9 ile bölelim; sonra da geometrik seri toplamını kullanalım:

$$\begin{aligned} 9S_n &= 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\cdots 9}_{n \text{ tane}} \\ &= (10-1) + (10^2 - 1) + \cdots + (10^n - 1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) \\ &\quad - \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ tane}} \\ &= \frac{10^{n+1} - 10}{10 - 1} - n. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

bulunur. □

Örnek. *$P_n = (n+1)(n+2)\cdots(2n)$ çarpımını bölen 2'nin en büyük kuvveti kaçtır?*

Çözüm. P_n ifadesini $n!$ ile bir çarpıp bir bölelim:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{n!\,(n+1)\cdots(2n)}{n!} = \frac{(2n)!}{n!} \\ &= \frac{2(2\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots(2n)(2\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))}{n!} \\ &= \frac{2^n n!\,(1\cdot 3\cdots(2n-1))}{n!} \\ &= 2^n(2n-1)!! \end{aligned}$$

olduğundan, cevap 2^n'dir. ($(2n-1)!!$ ifadesi 1'den $2n-1$'e kadar olan tek sayıların çarpımıdır.) □

Örnek. *$Sn = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ toplamını bulunuz.*

Çözüm.

$$\begin{aligned} xS_n &= x^2 + 2x^3 + \cdots + nx^{n+1} \\ xS_n - S_n &= -x + (x^2 - 2x^2) + (2x^3 - 3x^3) \\ &\quad + \cdots + (n-1-n)x^n + nx^{n+1} \\ &= -x(1 + x + \cdots + x^{n-1}) + nx^{n+1} \\ S_n(x-1) &= -x\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) + nx^{n+1} \\ &= \frac{-x^{n+1} + x + (x-1)nx^{n+1}}{x-1} \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x - x^{n+1} + nx^{n+2} - nx^{n+1}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

bulunur. □

Örnek. *$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$ toplamını bulunuz.*

Çözüm. $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$ biliniyor. Eğer $\sin(x/2) \neq 0$ ise, bu eşitlikten

$$\begin{aligned} S_n \sin\frac{x}{2} &= \sin\frac{x}{2}\sin x + \sin\frac{x}{2}\sin 2x \\ &\quad + \cdots + \sin\frac{x}{2}\sin nx \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)$$
$$=\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

bulunur. Eğer $\sin(x/2)=0$ ise, $S_n=0$ olduğu açıktır. □

Örnek. *$P=\cos x\cos 2x\cos 4x\cdots\cos 2^n x$ çarpımının sonucunu bulunuz.*

Çözüm. $\sin x\neq 0$ kabul edelim ve P'yi $\sin x$ ile bir çarpıp bir bölelim ve sinüs için çift açı özdeşliğini defalarca kullanalım:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sin x\cos x\cos 2x\cdots\cos 2^n x}{\sin x}\\ &= \frac{\sin 2x\cos 2x\cdots\cos 2^n x}{2\sin x}\\ &\;\;\vdots\\ &= \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x}\end{aligned}$$

olur. (Eğer $\sin x=0$ ise, $P=\pm 1$'dir.) □

Yukarıdaki eşitlikte önce x yerine $2^{-n}x$ koyar, sonra $\sin 2x=2\sin x\cos x$ özdeşliğini kullanırsak, çok kullanışlı

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

eşitliğini elde ederiz. Bundan π sayısı için Viète[1] formülünü bulabiliriz. Bunun için her iki tarafın $n\to\infty$ iken limitini alır ve

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

limitini kullanırız. $n\to\infty$ iken, her x için $x/2^n\to 0$ sağlanır. O zaman

$$2^n\sin\frac{x}{2^n}=x\,\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\longrightarrow x$$

olur ve

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdots=\frac{\sin x}{x}$$

çıkar. $x=\pi/2$ koyarsak,

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdots=\frac{2}{\pi}$$

elde ederiz. $-\pi\leq x\leq\pi$ iken

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

dir. Dolayısıyla $n\geq 2$ için

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{2^n}&=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}\\ &=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}}}\\ &\;\;\vdots\\ &=\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}_{n\text{ tane kök}}\end{aligned}$$

değerlerini kullanabiliriz. Böylece

$$\pi=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

bulunur.

KAYNAKÇA

[1] N. Çalışkan, *Cebirsel Denklemlerin Kökleri*, *Matematik Dünyası*, 4, sayı 3, 9–13 (1994).

[1] Fransız matematikçi François Viète (1540–1603) üçüncü derece denklemlerin çözümünün trigonometrik halini de bulmuştur [1].