ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A131. $a < b < c < d$ için

$$f(x) = |x-a| + 2|x-6| + 3|x-c| + 4|x-d|$$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

A132. n bir tamsayı olsun ve $1 \le i \le n$ için $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ aralığında x_i noktaları verilsin.

$$\left|\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{2n}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

A133. y ekseni üzerinde sabit $(0,k)$ noktasında dik kesişen iki doğru x eksenini A ve B noktalarında kesiyorlar. $[AB]$ üzerine kurulan eşkenar üçgenin üçüncü köşesinin geometrik yeri nedir?

A134. Bir ABC üçgeninin B ve C köşelerinden geçen çember, AB ve AC doğrularını X ve Y noktalarında kesiyor. XY doğrusu BC doğrusunu bir Z noktasında kesiyorsa,

$$\frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{|XB|\,|AB|}{|YC|\,|AC|}$$

olduğunu ispatlayınız.

A135. Bir parabolün odağı F, parabol üzerindeki bir nokta P, P noktasının parabolün ekseni üzerindeki dik izdüşümü Q ve parabolün tepe noktası A ise, $|PQ|^2 = 4|AF|\,|AQ|$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y131. *MATEMATİK* sözcüğündeki harflerin tümünü kullanarak, bunların gelişigüzel dizilimleriyle elde edilen anlamlı, anlamsız tüm 9 harfli sözcüklerden kaç tanesinde iki ünsüz harf ard arda gelmez? (*Nurettin Ergun*)

Y132. Bir havuzun çevresinde saat yönünde sırayla 0 dan 60'a kadar numaralanmış 61 tane taş var. 0. taşın üzerindeki bir kurbağa önce 1. taşa, oradan 2. taşın üstünden atlayıp 4. taşa, oradan 4 taşın birden üstünden atlayıp 9. taşa, ... şeklinde sıçrayarak havuzun çevresinde dolanıyor. Kurbağa $k+1$'inci sıçrayışta saat yönünde $2k$ taşın üstünden atlayıp bir sonrakine sıçrıyor. Yeterince uzun bir süre sonunda kurbağanın üzerine basmadığı taş kalır mı? Kalırsa kaç tane böyle taş kalır? (*Albert Erkip*)

Y133. Bir parabolün herhangi üç teğetinin ikişer ikişer kesişme noktaları X, Y, Z ise XYZ çemberinin bu parabolün odağından geçtiğini ispatlayınız.

Y134. Birbirinin dışında bulunan A ve B merkezli iki çemberin ortak dış teğetleri bir C noktasında kesişiyor. Ortak iç teğetlerden biri de dış teğetleri D ve E noktalarında kesiyor. CDE çemberinin $[AB]$'nin orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

Y135. A, B, C açılarının ölçüleri sırayla $1, 2, 4$ ile orantılı olan bir ABC üçgeninin alanını çevrel çemberinin yarıçapı cinsinden hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

A121. $\sqrt[x]{9} = \sqrt[x]{6} + \sqrt[x]{4}$ denkleminin gerçel çözümlerini bulunuz. (*Selma Atabey*)

Çözüm. Denklemi $\sqrt[x]{4}$ sayısına bölelim. $\frac{9}{4} = (\frac{3}{2})^2$ ve $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ olduğundan

$$\left(\sqrt[x]{\frac{3}{2}}\right)^2 = \sqrt[x]{\frac{3}{2}} + 1$$

bulunur. $T = \sqrt[x]{3/2}$ alırsak, $T^2 - T - 1 = 0$'dan

$$T_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

köklerini buluruz. $T > 0$ olduğundan $+$ işaretini seçer ve

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log(1+\sqrt{5}) - \log 2}$$

buluruz.

(**Çözenler:** *Mustafa Akyüz, İhsan Aydemir, Atasagun Baykal, Barış Demir, Namık Gök, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu.*)

A122. Her n pozitif tamsayısı için

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \ge 6^n (n!)^2$$

eşitsizliğini kanıtlayınız. (*Turgay Uçkun*)

Çözüm. $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ sayılarının geometrik ortalaması $\sqrt[n]{1^2 2^2 \cdots n^2} = (n!)^{2/n}$'dir. Aritmetik ortalaması ise

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{2n^2+3n+1}{6}$$

olur. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(n!)^{2/n} \leq \frac{2n^2+3n+1}{6},$$

ve dolayısıyla istenen sonuç çıkar.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Barış Demir, Celalettin Orhan, Samanyolu Problem Grubu.*)

A123. $0 < r < 1$ şeklindeki bir r rasyonel sayısının ondalık açılımı $r = 0.x_1x_2x_3\cdots$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

limitini hesaplayınız. (*Nurettin Ergun*)

Çözüm. Limitini aradığımız ifadeye A_n diyelim. Rasyonel sayıların ondalık açılımı devirlidir; o halde

$$r = 0.x_1x_2\cdots x_p\overline{y_1y_2\cdots y_m}$$

şeklinde yazılabilir. $0 \leq q < m-1$ olacak şekilde, n'yi $n = km+q$ diye yazalım.

$$A_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_p}{n} + \frac{k(y_1+y_2+\cdots+y_m)}{n} + \frac{y_1+y_2+\cdots+y_{q-1}}{n}$$

olacaktır. n büyüdükçe ilk terim ve son terim sıfıra, n/k oranı ise m'ye gideceğinden, aranan limit

$$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_m}{m},$$

yani devirli kısmın rakamlarının ortalaması olacaktır. Burada bazı sayılar için aranan limitin açılıma bağlı olduğuna işaret edelim. $r = \frac{1}{10}$ için $r = 0.1\overline{0}$ yazarsak limit sıfır, $r = 0.0\overline{9}$ yazarsak limit dokuz olacaktır.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, İhsan Aydemir.*)

A124. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan iki merkezli bir dörtgenin alanının $S = \sqrt{abcd}$ olduğunu gösteriniz.

(Hem çevrel hem de içteğet çemberi olan bir dörtgene *iki merkezli dörtgen* adı verilir.)

Çözüm. Teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların toplamı eşittir. $a+c = b+d$, yani $a-d = b-c$'den kare alarak

$$a^2+d^2-2ad = b^2+c^2-2bc \qquad (1)$$

bulunur. Kirişler dörtgeninde karşılıkla açıların toplamı $180°$'dir. ABD ve DBC üçgenlerinde kosinüs teoreminden

$$|BD|^2 = a^2+d^2-2ad\cos A = b^2+c^2-2bc\cos C,$$

ve $\cos C = \cos(180° - A) = -\cos A$ olduğundan,

$$a^2+d^2-2ad\cos A = b^2+c^2+2bc\cos A \qquad (2)$$

çıkar. (2)'den (1)'i çıkarırsak

$$\cos A = \frac{ad-bc}{ad+bc}$$

ve

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{2\sqrt{abcd}}{ad+bc} \qquad (3)$$

bulunur. Dörtgenin alanı ABD ve DBC üçgenlerinin alanlarının toplamı, yani

$$S = \frac{1}{2}ad\sin A + \frac{1}{2}bc\sin C = \frac{\sin A}{2}(ad+bc)$$

sayısıdır. (3)'ten $S = \sqrt{abcd}$ çıkar.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Atasagun Baykal, Namık Gök, Cemal Özboğa, Samanyolu Problem Grubu, Muhsin Yılmaz.*)

A125. Bir ABC üçgeninin kenarları a, b, c, çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. ABC dar açılı ise, $a^2+b^2+c^2 > 8R^2$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. Çevrel çemberin B noktasından geçen çapı $[BA']$ olsun. B açısı dar açı olduğundan $AA'C$ açısı geniş açı olur ve buradan $|AA'|^2 + |A'C|^2 < b^2$ bulunur. Diğer taraftan BAA' ve BCA' birer dik üçgen olup $c^2+|AA'|^2 = 4R^2$ ve $a^2+|CA'|^2 = 4R^2$ sağlanır. Dolayısıyla

$$a^2+b^2+c^2 > a^2+c^2+|AA'|^2+|CA'|^2 = 8R^2$$

çıkar.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Namık Gök, Ülkü Öztaş, Samanyolu Problem Grubu.*)

Y121. $2m-1 \le n$ olacak şekildeki n, m pozitif tamsayıları için

$$\binom{2n}{2m-1} = 2\left[\binom{n}{2m-1} + \binom{n}{2m-2}\binom{n}{1} + \binom{n}{2m-3}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{m}\binom{n}{m-1}\right]$$

olduğunu gösteriniz. (*Nurettin Ergun*)

Çözüm. Eşitliğin sol tarafı $(1+x)^{2n}$ çarpımının açılımında x^{2m-1}'in katsayısıdır. Bu çarpımı $(1+x)^n(1+x)^n$ şeklinde hesaplarsak, x^{2m-1} elde etmek için ilk çarpımdan x^{2m-k}, ikincisinden de x^k'li terimleri çarpmak gerekir. $(1+x)^n$ açılımında x^k'nin katsayısına c_k diyelim. $0 \le k \le m-1$ ve $m \le k \le 2m-1$ aralıklarındaki terimler simetriden dolayı sırayla birbirlerine eşit olacağından, x^{2m-1}'in katsayısı

$$2(c_{2m-1}c_0 + c_{2m-2}c_1 + \cdots + c_m c_{m-1})$$

olur. $c_k = \binom{n}{k}$ olduğundan, bu bize aranan eşitliğin sağ tarafını verir.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.*)

Y122. Bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunlukları, r içteğet çemberin yarıçapı, $2s = a+b+c$, $p = ab+bc+ac$ ve S üçgenin alanı olsun. ABC üçgeninin bir dik üçgen olması için gerek ve yeter koşulun

$$r^3 - sr^2 + (p - s^2)r - \frac{S^2}{s} = 0$$

olduğunu gösteriniz. (*Selma Atabey'in bir sorusundan türetildi.*)

Çözüm. Bir ABC üçgeninde A açısının dik olması için gerek ve yeter koşul $r = s - a$ olmasıdır. Bunu b ve c kenarları için tekrarlarsak, ABC üçgeninin dik olması için gerek ve yeter koşul

$$(r-(s-a))(r-(s-b))(r-(s-c)) = 0$$

olmasıdır. Bu son çarpım açılıp gerekli sadeleştirmeler yapılınca istenen koşul elde edilir.

(**Çözen:** *Aatasagun Baykal.*)

Y123. $N > 2$ bir tamsayı ve $n = 3N$ ise, düzgün bir n-gende uzunluklarının farkı bir kenarın uzunluğuna eşit olan iki köşegen olduğunu gösteriniz. (*Ferit Öktem*)

Çözüm. Düzgün bir n-genin bir kenarı $2\sin\frac{\pi}{n}$, köşegenleri ise $k = 2, 3, \ldots, n-2$ için $2\sin\frac{k\pi}{n}$ uzunlukları ile orantılıdır.

$$\sin\frac{k\pi}{n} - \sin\frac{j\pi}{n} = 2\cos\frac{k+j}{2n}\pi \sin\frac{k-j}{2n}\pi$$

olduğundan, $k - j = 2$ ve $\frac{k+j}{2n} = \frac{1}{3}$ seçebilirsek istenen koşul sağlanır. $n = 3N$ olduğundan, $k = N+1$ ve $j = N-1$ bulunur. $N > 2$ ise istenen sağlanacaktır. $N = 2$ için ise bir köşegenle bir kenarın farkı bir kenara eşit olacaktır.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Samanyolu Problem Grubu.*)

Y124. $(x-1)^n(2x^2+1)^n$ çarpımının açılımı $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{3n}x^{3n}$ olsun. $A_0 + A_3 + A_6 + \cdots + A_{3n}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm. Verilen polinoma $P(x)$ diyelim.

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

için $\omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\omega}$ ve $\omega^3 = 1$ olduğu görülür. ($\bar{\omega}$, ω'nın karmaşık eşleniği demektir.) O halde $1 + \omega^{3k} + (\omega^2)^{3k} = 1+1+1 = 3$, $1 + \omega^{3k+1} + (\omega^2)^{3k+1} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$ ve $1 + \omega^{3k+2} + (\omega^2)^{3k+2} = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ sağlanır.

$$\begin{aligned} P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) &= \sum_{j=0}^{3n} A_j(1 + \omega^j + (\omega^2)^j) \\ &= 3(A_0 + A_3 + \cdots + A_{3n}), \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$A_0 + A_3 + \cdots + A_{3n} = \frac{P(1) + P(\omega) + P(\omega^2)}{3}$$

olacaktır. Öte yandan $P(1) = 0$,

$$\begin{aligned} P(\omega) &= [(\omega-1)(2\omega^2+1)]^n \\ &= [2\omega^3 - 2\omega^2 + \omega - 1]^n \\ &= [-2\omega^2 + \omega + 1]^n = (-3\omega^2)^n \\ P(\bar{\omega}) &= P(\bar{\omega}) = \overline{P(\omega)} = \overline{(-3\omega^2)^n} = (-3\omega)^n \end{aligned}$$

olduğundan,

$$P(1) + P(\omega) + P(\omega^2) = (-3)^n[\omega^n + \omega^{2n}]$$

bulunur. $n = 3k$ ise $\omega^n + \omega^{2n} = 2$ ve de $n \ne 3k$ ise $\omega^n + \omega^{2n} = \omega + \omega^2 = -1$ olacağından, aranan toplam

$$\begin{array}{lll} n \equiv 0 \pmod 3 & \text{ise} & -2(-3)^{n-1}, \\ n \not\equiv 0 \pmod 3 & \text{ise} & (-3)^{n-1} \end{array}$$

olacaktır.

(**Çözen:** *Murat Aygen.*)

Y125.

$$f_p(n)=\frac{1}{(p+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1) \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & C_1^{p-1} & C_2^{p-1} & \cdots & C_{p-2}^{p-1} & 0 & (n+1)^{p-1} \\ 1 & C_1^{p} & C_2^{p} & \cdots & C_{p-2}^{p} & C_{p-1}^{p} & (n+1)^{p} \\ 1 & C_1^{p+1} & C_2^{p+1} & \cdots & C_{p-2}^{p+1} & C_{p-1}^{p+1} & (n+1)^{p+1} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan f_p fonksiyonu için $f_p(n)=1+2^p+3^p+\cdots+n^p$ olduğunu gösteriniz. (*Tamer Adanır*)

Çözüm. Bilindiği gibi

$$C_k^m=\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!\,(m-k)!}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

demektir. Önce $f_p(n)-f_p(n-1)=n^p$ olduğunu gösterelim. Determinant fonksiyonu matrislerin satır ve sütunlarına göre doğrusal olduğundan,

$$f_p(n)-f_p(n-1)=\frac{1}{(p+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)-n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)^2-n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p-1}{1} & \binom{p-1}{2} & \cdots & \binom{p-1}{p-1} & 0 & (n+1)^{p-1}-n^{p-1} \\ 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} & (n+1)^{p}-n^{p} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{p-2} & \binom{p+1}{p-1} & (n+1)^{p+1}-n^{p+1} \end{vmatrix}$$

elde ederiz. Şimdi $k=1,2,\ldots,p$ iken sırayla k'yinci sütunu $-n^{k-1}$ ile çarpıp $p+1$'inci sütuna ekleyelim. Determinantın değeri değişmez; ayrıca

$$(n+1)^{p+1}-n^{p+1}-1-n\binom{p+1}{1}-n^2\binom{p+1}{2}-\cdots-n^{p-1}\binom{p+1}{p-1}=\binom{p+1}{p}n^p,$$

$$(n+1)^{p}-n^{p}-1-n\binom{p}{1}-n^2\binom{p}{2}-\cdots-n^{p-1}\binom{p}{p-1}=0,$$

ve benzer şekilde diğerleri de sıfır olur. Böylece

$$f_p(n)-f_p(n-1)=\frac{1}{(p+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p-1}{1} & \binom{p-1}{2} & \cdots & \binom{p-1}{p-2} & 0 & 0 \\ 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} & 0 \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{p-2} & \binom{p+1}{p-2} & \binom{p+1}{p}n^p \end{vmatrix}$$

haline gelir. Köşegeninin üstündeki bütün elemanları sıfır olan böyle bir matrisin determinantı köşegen elemanlarının çarpımıdır. Buradan derhal

$$f_p(n)-f_p(n-1)=\frac{1}{(p+1)!}n^p\binom{p+1}{p}\binom{p}{p-1}\binom{p-1}{p-2}\cdots 2\cdot 1=\frac{(p+1)!}{(p+1)!}=n^p$$

elde edilir. Bu indirgeme bağıntısıyla $f_p(n)=n^p+(n-1)^p+\cdots+2^p+1^p+f_p(0)$ olur. Öte yandan $f_p(0)$'a bakılırsa, birinci ve $p+1$'inci sütunlar aynı olduğundan, $f_p(0)=0$ çıkar. Sonuç olarak $f_p(n)=1^p+2^p+\cdots+n^p$ buluruz.

(**Çözen:** *Emre Alkan.*)