PROBLEM SEMİNERLERİ

Hazırlayan: Hasan Fehmi Ateş, Selçuk Ateşkan, Halil Bayrak, Oytun Eskiyenentürk, Barış Fidan, Caner Kazancı, Çetin Ürtiş, Bayram Yenikaya *

Problem Semineri 96/6, 24 Nisan 1996

1. A, 13 farklı gerçel sayıdan oluşan bir küme ise,

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2-\sqrt{3}$$

eşitsizliğini sağlayan $a, b \in A$ sayılarının bulunduğunu gösteriniz.

2. n ve k pozitif tamsayılar, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de gerçel sayılar ise,

$$0 < \max_{1\le i\le n} |x_i| \le k$$

ve

$$|x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n| < \frac{1}{k^n}$$

koşullarını sağlayan $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tamsayılarının bulunduğunu gösteriniz.

3. $n \ge 2$ olmak üzere, düzlemde n farklı nokta verilmiş olsun. Bu noktaların ikişer ikişer birbirlerinden olan uzaklıklarının en büyüğüne D, en küşüğüne ise d diyelim. Bu durumda

$$D > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n}-1)d$$

olduğunu gösteriniz.

4. n pozitif bir tamsayı olsun. Düzlemde sonlu sayıda noktadan oluşan ve kendisine ait her P noktası için yine kendisine ait ve her birinin P'ye olan uzaklığı 1 olan en az n nokta bulunacak şekilde bir kümenin var olduğunu gösteriniz.

Problem Semineri 96/7, 15 Mayıs 1996

Aşağıdaki problemlerdeki araç, deposuna en fazla 1 birim benzin alabilmekte, ancak istediği yere daha sonra kullanmak üzere istediği kadar benzin bırakabilmektedir. Aracın gittiği mesafe yaktığı benzinle doğru orantılıdır ve bir birim benzinle katettiği yol, mesafe birimi olarak kabul edilmektedir.

1. $n \ge 0$ bir tamsayı ve $0 \le f \le 1$ olmak üzere, başlangıç noktasında $n+f$ birim benzin vardır. Aracın bu noktadan hareketle gidebileceği azami mesafenin

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{f}{2n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2. $m, k \ge 0$ tamsayılar, $0 \le f, g < 1$ ve $m+g > k+f$ olsun. Başlangıç noktasında $m+g$ birim benzin vardır. Aracın görevi, bir F noktasına $k+f$ birim benzin bırakarak başlangıç noktasına geri dönmektir. Bu görevin yerine getirilebilmesi için F noktasının başlangıç noktasından en fazla ne kadar uzakta olabileceğini bulunuz.

3. $m > 0$ ve $k \ge 0$ tamsayılar, $0 \le f, g < 1$ ve $m+g \le k+f$ olsun. S noktasında $m+g$ birim, F noktasında ise $k+f$ birim benzin bulunmaktadır. Araç, S noktasından hareketle F noktasına gidip S'ye geri dönecektir. Bunun başarılabimesi için S ile F arasındaki uzaklığın en fazla ne kadar olabileceğini bulunuz.

4. Elimizde toplam $x \ge 2$ birim benzin bulunmaktadır. Bu kez S ile F noktalarını kendimiz seçip, elimizdeki benzini bu iki nokta arasında istediğimiz gibi bölüştürüyoruz. Araç, yine S noktasından hareketle F'ye gidip, oradan S'ye geri dönecektir. Bunun başarılabilmesi için S ile F arasındaki uzaklığın en fazla ne kadar olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

Problem Semineri 95/10

1. xy koordinat düzlemindeki $y = \frac{a}{b}x$ doğrusunu ele alalım. Köşe koordinatları $(0,0), (0,a), (b,0), (b,a)$ olan dikdötgenin içinde kalan tamsayı koordinatlı noktalardan köşegenin altında kalanların sayısı

$$\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2a}{b}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor\frac{(b-1)a}{b}\right\rfloor,$$

* ODTÜ ve Bilkent Üniversitesi lisans öğrencileri

köşegenin üstünde kalanların sayısı da

$$\left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(a-1)b}{a} \right\rfloor$$

olup bu iki sayı birbirine eşittir. $(a,b) = m \neq 1$ durumu ayrıca incelenebilir.

2. Bulunması istenen tamsayıya m diyelim. $(a,b) = 1$ olduğundan, $m = au + bv$ yapacak u, v tamsayıları vardır. Öte yandan, her tamsayı k için $m = a(u - kb) + b(v + ka)$'dır. $k_0 = \max\{ k : u - kb \geq 0 \}$ diye tanımlarsak, $0 \leq u - k_0 b < b$ sağlanır. $u' = u - k_0 b$ ve $v' = v + k_0 a$ diyelim. O zaman $m = au' + bv'$ olur. Şimdi $m \notin \{ ax + by : x, y \in \mathbb{N}_0 \}$ olması ile $0 \leq u' < b$ ve $v' < 0$ olmasının eşdeğer olduğu açıktır. Böyle u''lerin en büyüğü $u' = b - 1$ ve v''lerin en büyüğü de $v' = -1$'dir. O zaman da $m = a(b-1) + b(-1) = ab - a - b$ olur.

3. Elde edilen toplam puanların kümesini E ile, E'nin eleman sayısını da $|E|$ ile gösterelim. Negatif olmayan tamsayılar kümesine $\mathbb{N}_0$ dersek, o zaman $E = \{ ax + by : x, y \in \mathbb{N}_0 \}$ olur. $|\mathbb{N}_0 \setminus E| < \infty$ olduğundan, $(a,b) = 1$ çıkar. Şimdi $|\mathbb{N}_0 \setminus E| = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ olduğunu gösterelim.

Birinci dördüldeki tamsayı koordinatlı noktalara T diyelim. $m \in E$ ise, $ax + by = m$ doğrusu üstünde T'ye ait bir nokta bulunacaktır. Eğer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T$, $ax_1 + by_1 = m$ ve $ax_2 + by_2 = m$ ise, o zaman $x_1 = x_2 + bt$ $(t \in \mathbb{Z})$ olur. $ax + by = m$ üstünde T'ye ait ardışık iki nokta arasındaki yatay mesafe de b olur. Dolayısıyla $m \geq ab$ ise, $b \leq \frac{m}{a}$ olduğundan $m \in E$ bulunur. Eğer $0 \leq m < ab$ ise, $\frac{m}{a} < b$ olacağından, $ax + by = m$ üstünde T'ye ait en fazla bir nokta bulunabilir. Dolayısıyla $\{ (x,y) \in T : 0 \leq ax + by < ab \}$ ile $E \cap [0, ab)$ kümeleri arasında birebir eşleme vardır. Şimdi $\{ (x,y) : 0 \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq a \}$ bölgesinde T'ye ait $(a+1)(b+1)$ nokta vardır. O halde elde edilemeyen toplam puanların sayısı,

$$ab - \frac{(a+1)(b+1) - 2}{2} = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

dir.

Verilen bilgiye göre $70 = (a-1)(b-1)$'dir. $70 = 1 \cdot 70 = 2 \cdot 35 = 5 \cdot 14 = 7 \cdot 10$ şeklinde yazılabilir. $a > b$ ve $(a,b) = 1$ olduğundan, ya $a = 71$ ve $b = 2$, ya da $a = 11$ ve $b = 8$ olacaktır. Ancak $58 = 71 \cdot 0 + 29 \cdot 2$ ve $58 \notin E$ olduğundan $a = 71$ ve $b = 2$ olamaz. Öte yandan $11x + 8y = 58$ doğrusu üstünde T'ye ait eleman yoktur. Sonuç olarak, oyunda alınabilen puanlar $a = 11$ ve $b = 8$'dir.

4. $E = \{ xbc + yca + zab : x, y, z \in \mathbb{N}_0 \}$ olsun. Farzedelim ki $2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$ olacak biçimde $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ bulunsun. O zaman $2abc = (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab$ çıkar. Ancak $(a,b) = (a,c) = d$ olduğundan, $a \mid x + 1$ elde edilir. Benzer biçimde $b \mid y + 1$ ve $c \mid z + 1$ olur. O zaman da

$$2abc = (x+1)bc + (y+1)ca + (z+1)ab \geq 3abc$$

olur. Dolayısıyla farzedişimiz yanlıştır.

Şimdi $n > 2abc - ab - bc - ca$ ise, $n \in E$ olduğunu gösterelim. a, b pozitif tamsayı ve $(a,b) = 1$ ise,

$$\max(\mathbb{Z} \setminus \{ ax + by : x, y \in \mathbb{N}_0 \}) = ab - a - b$$

dir. $b = 1$ veya $c = 1$ ise $n \in E$ olduğu kolaylıkla görülür. $b > 1$ ve $c > 1$ olsun. $b(c-1) > c - 1$, yani $bc - b - c > -1$'dir. $a > 0$ olduğundan $abc - ab - ac > -a$ olur. Ama $(a, bc) = 1$ olduğundan, $x, w \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $n = xbc + wa$ şeklinde yazılabilir ve $0 \leq x < a - 1$ ile $\omega > 0$ sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} wa &= n - xbc \geq n - (a-1)bc \\ &= n - abc + bc > abc - ab - ca \\ w &> bc - b - c \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman $y, z \in \mathbb{N}_0$ için $w = yc + zb$ şeklinde yazılabilir. Böylece $x, y, z \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n = xbc + yca + zba$ olur.

Problem Semineri 95/11

1. A_1, A_2, A_3, A_4 ve B_1, B_2, B_3 noktalarımız olsun. Bütün $[A_iA_j]$ ve $[B_iB_j]$'leri $(i \neq j)$ kırmızıya, $[A_iB_j]$'leri ise maviye boyayalım. Toplam 9 kırmızı doğru parçası vardır ve istenen şart sağlanır. Şimdi de 9'dan az doğru parçasını boyamakla istenen şartın sağlanamayacağını gösterelim.

Kırmızı doğru parçalarının sayısının 9'dan az olduğunu farzedelim. O zaman öyle bir nokta vardır ki bu noktadan en az dört mavi doğru parçası çıkar. Bu noktaya X diyelim. Bu doğru parçalarından dördünü ele aldığımızda bunların diğer uçlarındaki X_1, X_2, X_3, X_4 noktalarını ikişer ikişer birleştiren 6 doğru parçası kırmızı olmak zorundadır; yani $[XX_i]$ $(i = 1,2,3,4)$ mavi ve $[X_iX_j]$ $(i \neq j,\ i,j = 1,2,3,4)$ kırmızıdır. Kalan noktalara A ve B diyelim.

$[AX]$ ya da $[AX_1]$ kırmızı, $[BX]$ ya da $[BX_1]$ kırmızı, $[AX_2]$, $[BX_2]$ ya da $[AB]$ kırmızı olmak zorundadır. O zaman da kırmızı doğru parçalarının sayısı sekizi geçer.

2. Herhangi üç noktayı aldığımızda bunları birleştiren doğru parçalarından en az biri mavi olacak. n tekse, noktaları $\frac{n-1}{2}$ ve $\frac{n+1}{2}$ elemanlı iki kümeye; n çiftse, noktaları $\frac{n}{2}$ ve $\frac{n}{2}$ elemanlı iki kümeye ayıralım. Her iki kümenin noktalarını kendi içinde mavi doğru parçalarıyla birleştirip kalan doğru parçalarını kırmızıya boyayalım. O zaman kırmızı doğru parçalarının sayısı $\lfloor n^2/4 \rfloor$'tür. Bunun maksimum sayı olduğunu tümevarım ile gösterelim.

İfadenin $k = 3$ için doğru olduğu açıktır. İfadenin $3 < k \leq n$ için de doğru olduğunu varsayalım. $n+1$ noktadan en az bir kırmızı doğru parçası çıktığını varsayabiliriz. (Yoksa kırmızı doğru parçalarının sayısı $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$'ten küçük olurdu.) Bu doğru parçasının iki ucundaki noktalar dışındaki $n-1$ noktanın birleştirilmesiyle elde edilen doğru parçalarının en fazla $\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$ tanesi kırmızıdır. Bu iki noktayı diğer $n-1$ noktaya birleştirirken en fazla $n-1$ kırmızı doğru parçası kullanabiliriz. (Her ikisini de aynı noktaya kırmızı doğru parçasıyla birleştiremeyiz). O zaman maksimum sayı

$$\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + n - 1 + 1 = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor$$

olur.

3. Beşgenlerden birinin kenarlarının hepsinin aynı olmadığını varsayalım. B_2 noktasında iki farklı renkteki kenar buluşsun. B_2'den çıkan doğru parçalarından üçü aynı renktir ve bu üçünün ikisi ardışık A_i'lere gidecektir. $[B_1B_2]$ mavi, $[B_2B_3]$ kırmızı, $[B_1A_1]$ ve $[B_1A_2]$ mavi olsun. $[A_1A_2]$, $[A_1B_3]$ ve $[A_2B_3]$ kırmızı olmak zorundadır. Bu durumda da bütün kenarları kırmızıya boyanmış bir üçgen oluşmuş olur. Demek ki her iki beşgenin de kenarları kendi içinde aynı renkli olmak zorundalar.

Taban ve tavan beşgenlerinin farklı renklerde olduklarını varsayalım. B_1'i ele alalım. B_1'i A_i'lere birleştiren doğru parçalarının en az üçü aynı renktedir. Bu üç doğru parçasından ikisi ardışık kenarlara gider. $[A_2A_3]$ kırmızı, $[B_1A_2]$ ve $[B_1A_3]$ mavi olsun. $[A_2B_2]$ ve $[A_3B_2]$ mavi olmak zorundadır. Aynı zamanda $[A_2B_3]$ de mavi renklidir. Bu durumda da bütün kenarları mavi olan $A_2A_3B_2$ üçgeni oluşur. O zaman taban ve tavan beşgenlerinin tüm kenarları aynı renktedir.

4. p tane noktayı ikişer ikişer birleştiren tüm doğru parçalarının kümesine K_p diyelim. K_p'ye p köşeli tam graf denir. K_9'da toplam 36 doğru parçası vardır. Elimizdeki şekilde K_6 bulunuyorsa kenarları aynı renk olan üçgen de var demektir. n, şekildeki doğru parçalarının sayısı olsun. $n = 36$ ise K_6 vardır. $n = 35$ ise, eksik doğru parçasının iki ucundaki noktalar haricindeki 7 nokta K_6'yı içerir. $n = 34$ ise $[A_1A_2]$ ve $[A_3A_4]$ veya $[A_1A_2]$ ve $[A_2A_3]$ hariç, diğer doğru parçaları vardır. A_1, A_2, A_3, A_4 hariç diğer beş nokta ve A_4, K_6'yı oluşturur.

$n = 33$ ise, en fazla 6 nokta diğer noktalardan bazıları ile birleştirilmemiş olabilir. Bu 6 noktadan üçü birbirleriyle doğru parçaları ile bağlantılıdır. Bu üç nokta ve ilk baştaki 6 nokta haricindeki üç nokta K_6'yı oluşturur. $n = 32$ ise, X_1, X_2, X_3, X_4 ve X_5 noktalarını, $[X_1X_2]$, $[X_2X_3]$, $[X_4X_5]$ ve $[X_5X_6]$'yı maviye, geri kalan 10 doğru parçasını da kırmızıya boyuyarak birleştirelim. $[A_1X_1]$'i boş bırakarak ve diğer noktalardan X_1'e çizilen doğru parçalarının aynı renklisini A_1'e çizerek, A_1'i de şekle ekleyelim. A_1 ve X_1 çifti için yaptığımız işlemleri benzer şekilde önce (A_2, X_2) sonra (A_3, X_3) ve daha sonra da (A_4, X_4) çiftleri için de yaparak A_2, A_3 ve A_4'ü de sırayla şekle eklemiş olalım. Toplam 32 doğru parçası kullanılmış olup, hiç aynı renkli üçgen oluşmamış olur. Aynı renkli üçgeni zorunlu kılan en küçük sayı 33'tür.

Problem Semineri 95/12

Bu seminerdeki problemlerin çözümleri için [1]'e bakınız.

Problem Semineri 95/13

1. (a) özelliğinden fonsiyonun birebir olduğu anlaşılıyor. (b)'de $y = 1$ alınırsa,

$$f(f(x)) = x^2 f(x) \qquad (1)$$

eşitliği elde edilir. (b)'de y yerine $f(y)$ alınca da

$$f(f(y)f(x)) = x^2 f(xf(y)) = x^2y^2 f(xy) \qquad (2)$$

eşitliği elde edilir. (1)'de x yerine xy alınınca

$$f(f(xy)) = x^2y^2 f(xy) \qquad (3)$$

eşitliği bulunur. (2), (3) ve fonksiyonun birebir olma özelliğinden $f(x)f(y) = f(xy)$ bağıntısı bulunur. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun bütün şartları sağladığı görülüyor.

Bir x_1 değeri için $f(x_1) = y_1 < x_1^2$ olduğunu farzedelim. O zaman $f(y_1) < f(x_1^2)$ ve

$$f(y_1) = f(f(x_1)) = x_1^2 f(x_1) = x_1^2 y_1 < f(x_1^2) = f(x_1)f(x_1) = y_1^2,$$

buradan da $x_1^2 y_1 < y_1^2$ ve dolayısıyla $x_1^2 < y_1$ çelişkisi çıkar. Aynı şekilde hiçbir x_1 değeri için $f(x_1) > x_1^2$ olamayacağı da gösterilir. Sadece $f(x) = x^2$ fonksiyonu vardır.

2. $f \in A$ olsun. $n = m = 0$ alırsak $(f(0))^2 = 2f(0)$ olur. $f(0) \neq 0$ olduğundan $f(0) = 2$ çıkar. $m = 1$ iken $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n)f(1) = f(n+1)+f(n-1)$ elde edilir. $f(1)$ biliniyorsa, bu bir indirgeme bağıntısı olduğundan her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(n)$ bulunur.

(a) $f(1) = \frac{5}{2}$ için indirgeme bağıntısı çözülürse, $f(n) = 2^n + 2^{-n}$ elde edilir.

(b) $f(1) = \sqrt{3}$ için indirgeme bağıntısı çözülürse, $f(n) = 2\cos(\pi n/6)$ elde edilir.

3. Önce $\alpha = \beta$ olsun. $x = y$ alırsak ve terimleri tek tarafta toplarsak,

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha/2} f(y) - \left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha/2} f(x)\right)^2 = 0,$$

ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$\frac{f(x)}{x^\alpha} = \frac{f(y)}{y^\alpha}$$

bulunur. Dolayısıyla öyle bir λ sabiti vardır ki $f(x) = \lambda x^\alpha$'dır. $\lambda^2 x^\alpha y^\alpha = 2\lambda(xy/2)^\alpha$ eşitliğinden dolayı $\lambda = 0$ veya $\lambda = 2^{-\alpha}$'dır. Bu durumda iki çözüm vardır.

Şimdi $\alpha \neq \beta$ olsun. Fonksiyon eşitliğinde x ile y'nin yerlerini değiştirip, yeni eşitlikten eski eşitliği çıkarırsak

$$(x^\alpha - x^\beta) f\left(\frac{y}{z}\right) = (y^\alpha - y^\beta) f\left(\frac{x}{z}\right)$$

elde ederiz. Yukarıdaki gibi, λ bir sabit ve $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ olmak üzere, $f(x/z) = \lambda(x^\alpha - x^\beta)$ buluruz. Fonksiyon eşitliğini tekrar kullanıp λ için durumları incelersek, sadece $f(x) = 0$ çözümünü buluruz.

4. Koşulu sağlayan bir f birebir olmalıdır. $x = 1$ için fonksiyon eşitliğini kullanırsak,

$$\frac{1}{f(y)} = f\left(\frac{1}{y}\right)$$

bulunur. $y = f(1/t)$ ise, $y = 1/f(t)$'dir. Buradan her $x \in \mathbb{Q}^+$ için $f(xt) = f(x)f(t)$ bulunur. Tüm $x, t \in \mathbb{Q}^+$ için $f(xt) = f(x)f(t)$ ve $f(f(x)) = 1/x$ koşullarını sağlayan f fonksiyonu denklemin bir çözümüdür.

p_j, j'yinci asal sayıyı göstersin ve f'yi

$$f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1}, & \text{eğer } j \text{ tekse;} \\ \dfrac{1}{p_{j-1}}, & \text{eğer } j \text{ çiftse;} \end{cases}$$

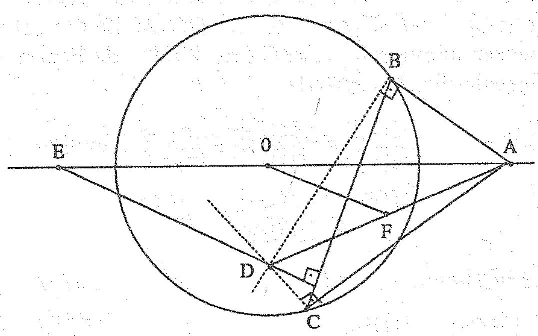
olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$f(p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}) = (f(p_1))^{n_1} \cdots (f(p_k))^{n_k}$$

olur. Dolayısıyla bu f yukarıda verilen iki koşulu da sağlar.

Problem Semineri 96/1

1. $[AD]$ doğru parçasının orta noktası F olsun. DBA ve DCA açıları dik açı olduklarından $ABDC$ noktalarından bir çember geçer. F noktası bu çemberin merkezidir. O merkezli çember ile F merkezli çemberin ortak kirişi olan $[BC]$'yi taşıyan doğru, bu iki çemberin kuvvet ekseni olup, merkezler doğrusuna, yani $[OF]$'ye diktir. $[BC]$'ye dik olduklarından, $[OF]$ ile D'den $[BC]$'ye çizilen $[DE]$ dikmesi birbirine paraleldir. F, $[AD]$'nin orta noktası olduğundan O noktası da $[EA]$'nın orta noktasıdır. A, O, E aynı doğru üzerinde ve $|EO| = |OA|$ olduğundan, E ile A noktaları O noktasına göre simetriktir.



2. S çemberinin merkezine O diyelim. P aradığımız özellikte bir nokta olsun. D ve B, P ve A'dan geçen ve birbirine dik olan çemberlerin merkezleri olsun. Öyleyse BAD açısı diktir. BAD dik üçgeninde Öklit bağıntılarından, $|AQ|^2 = |QB|\,|QD|$ olur. $|AE| = |EO|$ da doğrudur. AOQ üçgeninde kenarortay bağıntısından,

$$|QO|^2 + |QA|^2 = 2|QE|^2 + 2|OE|^2,$$

ve OBD üçgeninde Stewart bağıntısından,

$$\frac{|OB|^2|QD|+|OD|^2|QB|}{|QD|+|QB|}-|QB|\,|QD|=|QO|^2$$

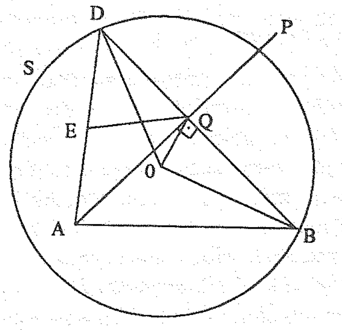
bulunur. $|OB|=|OD|=R$ alınırsa,

$$R^2=|AQ|^2+|QO|^2=2|EQ|^2+2|EO|^2$$

ve

$$|QE|^2=\frac{R^2-2|EO|^2}{2}$$

elde edilir ki bu sabittir. $|OP|=2|EQ|$ olduğundan P'nin geometrik yeri S ile aynı merkezli bir çemberdir.



3. Rasgele üç noktanın ağırlık merkezi G_1 ve ortosantrı H_1, kalan üç noktanın ağırlık merkezi G_2 ve ortosantrı H_2 olsun. O verilen çemberin merkezidir. Euler teoremine göre O, G_1, H_1 doğrusaldır ve O, G_2, H_2 de doğrusaldır. Ayrıca $[G_1G_2]$, $[H_1H_2]$'ye paraleldir. OG_1M ile OH_1D benzer üçgenlerdir; TMG_2 ile TDH_1 de benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla

$$\frac{|MG_1|}{|DH_1|}=\frac{|MG_2|}{|DH_2|}=\frac{x}{3x},$$
$$\frac{|MG_2|}{|DH_1|}=\frac{|MG_1|}{|DH_2|}=\frac{|MT|}{|TD|},$$

ve böylece

$$\frac{|MG_1|}{|MG_2|}=\frac{|DH_1|}{|DH_2|} \quad \text{ve} \quad \frac{|MG_2|}{|MG_1|}=\frac{|DH_1|}{|DH_2|}$$

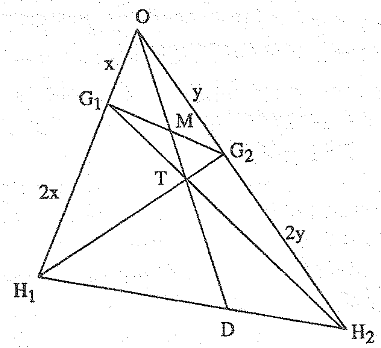
sağlanır. Bunlardan $|MG_1|=|MG_2|$, $|DH_1|=|DH_2|$,

$$\frac{|MT|}{|TD|}=\frac{|MG_1|}{|DH_1|}=\frac{1}{3},$$

$|TD|=3|MT|$,

$$\frac{1}{2}=\frac{|OM|}{|MD|}=\frac{|OM|}{|MT|+|TD|}=\frac{|OM|}{|MT|+3|MT|}$$

ve $|OM|=2|MT|$ elde edilir. M, $[G_1G_2]$'nin orta noktası, G_1 üç noktanın, G_2 diğer üç noktanın ağırlık merkezi olduğuna göre, M altı noktanın ağırlık merkezi olan sabit bir noktadır. Dolayısıyla T noktası, sabit OM doğrusu üzerinde $2|MT|=|OM|$ olacak şekilde sabit bir noktadır.



4. P, Q, R, S noktaları

$$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{d}{b},\quad \frac{|QB|}{|QC|}=\frac{a}{c},\quad \frac{|RC|}{|RD|}=\frac{b}{d},\quad \frac{|SD|}{|SA|}=\frac{c}{a}$$

olacak şekilde seçilirse, bu dört noktadan bir çember geçer. Bu oranları sabit tutarak alınacak başka dört noktadan da eş yarıçaplı bir çember geçer. Bunu şöyle görebiliriz: I, $ABCD$ teğetler dörtgenin içteğet çemberinin merkezi olsun.

$$|IP|=\frac{\sqrt{abcd}}{(a+b+c+d)/2}$$

sağlanır. Bu bağıntı kosinüs, sinüs ve Stewart teoremleri kullanılarak kolayca çıkarılmaktadır. P, Q, R, S simetrik noktalar oldukları ve $|IQ|$ uzunluğu sadece a, b, c, d'ye bağlı olduğu için, $|IP|=|IQ|=|IR|=|IS|$ bulunur. Dolayısıyla bu dört noktadan (oranlar sabit kalmak üzere her dört noktadan) bir çember geçer ve bu çemberin yarıçapı $ABCD$'nin sadece kenar uzunluklarına bağlıdır, yani yarıçap sabittir.

KAYNAKÇA

[1] S. Atabey, *Kotanjant Teoremi ve Uygulamaları*, *Matematik Dünyası*, **5**, sayı 5, 24–26 (1995).