

37. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI TAKIM SEÇME SINAVI

Derleyen: Albert Erkip *

1996 matematik olimpiyadı takımımız 23-24 Mart 1996 günleri Ankara'da yapılan seçme sınavı sonucunda belirlendi. Mehmet Ekmekçi, Ali Ekber Gürel, Yılmaz Koçer, Suat Namlı ve M. Ali Yıldırım'dan oluşan takım, Mayıs ayında Romanya'da Balkan, Temmuz ayında ise Hindistan'da 37. Uluslararası Matematik Olimpiyadı'na katılacak. Takımımıza iyi şanslar dileyerek, seçme sınavının sorularına yer verelim.

Birinci Gün, 23 Mart 1996

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

1. $\prod_{n=1}^{1996} (1 + nx^{3n})$ çarpımının, a_1, a_2, \dots, a_m sıfırdan farklı ve $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ olacak şekilde açılımını $1 + a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_mx^{k_m}$ ile gösterelim. a_{1996} katsayısını hesaplayınız.

2. Bir $ABCD$ paralelkenarında \hat{A} açısı dar açı olup, $[AC]$ köşegeni çap alınarak çizilen çember CB ve CD doğrularını E ve F noktalarında kesmektedir. Bu çemberin A noktasındaki teğeti BD doğrusunu P noktasında kesiyorsa, P, F, E noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

3. $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ olacak şekilde x_i gerçel sayıları veriliyor. Her $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ için $x_{i+1} - x_i \leq h$ ise,

$$\sum_{i=1}^n x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1})$$

toplamının

$$\left(\frac{1-h}{2}, \frac{1+h}{2}\right)$$

aralığında olduğunu kanıtlayınız.

Birinci Gün, 24 Mart 1996

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

4. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $\text{alan}(ABC) = \text{alan}(ADC)$ olup, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin kesim noktası E 'dir. E noktasından $[AD]$, $[DC]$, $[BC]$, $[AB]$ kenarlarına çizilen paralel doğrular $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ kenarlarını sıra ile K, L, M, N noktalarında kestiğine göre,

$$\frac{\text{alan}(KLMN)}{\text{alan}(ABCD)}$$

oranını hesaplayınız.

5. Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $S_{a,b} = \{n^2 + an + b : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde tanımlanan kümelerin en çok kaç tanesinin ikişer ikişer ayrık olduğunu belirleyiniz.

6. Hangi a, b pozitif gerçel sayıları için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ax_{n+1} - bx_n) = 0$$

eşitliğini sağlayan her $\{x_n\}$ dizisinin limiti 0 olur?

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi