DIRICHLET İLKESİ

İftihar Hacıyev *

Dirichlet ilkesinin en yaygın şekli şöyledir: *n tane kafeste m tane tavşan varsa ve $m > n$ ise, en az bir kafeste en az iki tane tavşan vardır* [1].

Bu apaçık düşüncenin soruları çözmek için nasıl faydalı olacağı bu durumda aşikâr değildir. Gerçekten belli bir soruda "tavşan" ve "kafes"lerin ne olduğunu ve "tavşan"ların neden fazla olduğunu anlamak kolay olmayabilir. "Tavşan" ve "kafes"lerin seçimi bir çok durumda açık değildir ve soruya göre Dirichlet ilkesini nasıl kullanmak gerektiğini bulmak kolay olmayabilir. En önemlisi bu metot yapıcı olmayan ispat veriyor; biz tabii hangi kafeste en az iki tavşanın olduğunu söyleyemeyiz, sadece bu kafesin varlığı söylenebilir.

Bazı sorular Dirichlet ilkesine benzer metotlarla çözülür. Uygun kuralları açıklayalım; bunlar olmayana ergi yöntemi ile kolayca ispatlanabilir.

(a) Uzunluğu 1 birim olan doğru parçasının içinde uzunlukları toplamı 1 birimden büyük olan birkaç tane parça alırsak, bunlardan en az ikisinin ortak noktası vardır.

(b) Yarıcapı 1 birim olan çemberin üzerinde uzunlukları toplamı 2π birimden büyük olan birkaç tane yay alırsak, bunlardan en az ikisinin ortak noktası vardır.

(c) Alanı 1 birim kare olan bölgenin içinde alanları toplamı 1 birim kareden büyük olan bir kaç tane bölge alırsak, bunlardan en az ikisinin ortak noktası vardır.

Örnek 1. *Düzlemin noktaları iki renge boyanmıştır. Kesişim noktaları aynı renkte olan iki yatay ve iki dikey doğrunun olduğunu ispatlayınız.*

Çözüm. Üç tane dikey ve dokuz tane yatay doğruyu göz önüne alalım. Yalnız bu doğruların kesişim noktalarını ele alacağız. Üç nokta 2 renkle $2^3 = 8$ türlü boyanabildiğinden, dokuz yatay doğrunun en az iki tanesi üzerindeki üçer nokta dikey olarak aynı tür boyanacaklar. İki renkle boyanmış üç noktadan aynı renkle boyanmış iki nokta her zaman seçilebilir. Bu iki noktadan geçen iki dikey doğru, önceden seçilmiş iki yatay doğru ile sorunun şartını sağlayacaktır. □

Örnek 2. *Her dışbükey $2n$-genin hiç bir kenara paralel olmayan köşegeni olduğunu ispatlayınız.*

Çözüm. $2n$-genin köşegen sayısı $\frac{1}{2}2n(2n-3) = n(2n-3)$ sayısına eşittir. Seçilen bir kenara paralel olan köşegen sayısının $n-2$'den fazla olmadığı kolayca ispatlanabilir. Bundan dolayı kenarlara paralel olan tüm köşegenlerin sayısı $2n(n-2)$ sayısından fazla değildir. $2n(n-3) < n(2n-3)$ olduğundan, hiç bir kenara paralel olmayan köşegen vardır. □

Örnek 3. *Uzunluğu 1 birim olan bir çubuk içinde birkaç tane parça öyle renklendirilmiştir ki, iki tane renkli parça arasındaki uzaklık 0.1 sayısına eşit değildir. Renklendirilmiş parçaların uzunlukları toplamının 0.5'ten büyük olmadığını ispatlayınız.*

Çözüm. Çubuğu uzunluğu 0.1 olan 10 eşit kısa çubuğa bölelim. Bu kısa çubukları üst üste koyalım ve aynı uzunluktaki bir kısa çubuğa bunların dik izdüşümlerini alalım. Renkli iki parça arasındaki uzaklık 0.1 sayısına eşit olmadığından, iki komşu parçanın renkli noktalarının izdüşümleri farklıdır. Bundan dolayı bir nokta 5'den fazla renkli noktanın izdüşümü olamaz. Demek ki, renkli parçaların izdüşümlerinin uzunlukları toplamı $5(0.1) = 0.5$ sayısından büyük değildir. □

Örnek 4. *Yarıçapı 16 olan bir daire içine 650 nokta yerleştirilmiştir. Dairenin içinde, iç yarıçapı 2 ve dış yarıçapı 3 olan ve içinde en az 10 nokta bulunan bir halkanın olduğunu ispatlayınız.*

* Dersane matematik öğretmeni