VEKTÖRLERE AİT İKİ TEOREMİN GEOMETRİK UYGULAMASI

Selma Atabey *

Bazı geometrik problemlerde verilen bir doğru parçasının verilen bir noktasının, bu doğru parçasını ayırdığı parçaların uzunluklarının oranını bulmamız, ya da noktanın doğru parçasını belli bir oranda böldüğünü göstermemiz gerekiyor. Aşağıdaki iki teoremi uygulayarak, bu soruların çözümü için genel bir metot vereceğiz.

Teorem 1. *Bir ABC üçgeninde bir N noktası bu üçgenin $[BC]$ kenarını $m:n$ oranında bölüyorsa,*

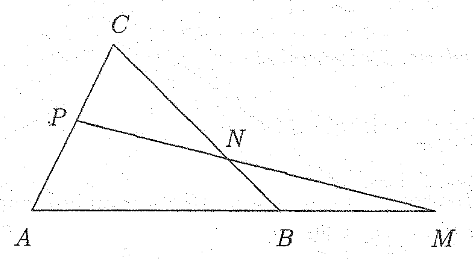
$$\overrightarrow{AN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}}{m+n}$$

sağlanır.

İspat. N noktası $[BC]$ kenarı üzerinde ve $|BN|:|NC| = m:n$'dir. Bu son eşitlik, $n\overrightarrow{BN} = m\overrightarrow{NC}$ olduğunu gösterir. Fakat $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}$ ve $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC}$'dir. O zaman $n(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}) = m(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AC})$, $n\overrightarrow{AN}+m\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AB}$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{AN} = \frac{m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AB}}{m+n}$$

bulunur. □



Teorem 2. *Bir ABC üçgeni verilsin ve AB, BC ve CB doğruları üzerinde $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{NC}$ ve $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{PA}$ olacak biçimde sırayla M, N, P noktaları alınsın. P, M, N noktalarının aynı doğru üzerinde olması için gerek ve yeter şart $\alpha\beta\gamma = -1$ olmasıdır.*

İspat. $\alpha\beta\gamma = -1$ olsun. P, M, N noktalarının aynı doğru üzerinde oldğunu göstereceğiz. PNC üçgeninden $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CP}$'dir. Ayrıca $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC}$ ve $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{NC}$'dir. O zaman $\beta\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC}$, yani $\overrightarrow{NC} = \frac{1}{\beta+1}\overrightarrow{BC}$ ve $\overrightarrow{BN} = \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{BC}$'dir. Benzer şekilde $\overrightarrow{CP} = \frac{\gamma}{\gamma+1}\overrightarrow{CA}$'dır. Dolayısıyla

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{\beta+1}\overrightarrow{BC} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\overrightarrow{CA} \qquad (1)$$

olur. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ ve $\alpha\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ eşitliklerinden $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AM} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{AB}$ olduğu da açıktır. Öte yandan $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}$'dir. O zaman

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{AB} + \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{\alpha+1}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) + \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

bulunur. Fakat $\alpha = -\frac{1}{\beta\gamma}$ olduğu kullanılırsa

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\beta\gamma}{1-\beta\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{BC}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\beta\gamma}{1-\beta\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{BC}$$

sağlanır. (1)'den dolayı

$$\frac{\beta(\gamma+1)}{1-\beta\gamma}\overrightarrow{NP} = \frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{BC}$$

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi matematik öğretmeni

$$+\frac{\gamma\beta(\gamma+1)}{(\gamma+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{CA}$$
$$=\frac{\beta(\gamma+1)}{(\beta+1)(1-\beta\gamma)}\overrightarrow{BC}+\frac{\beta\gamma}{1-\beta\gamma}\overrightarrow{CA}$$
$$=\overrightarrow{MN}$$

olur. Bu da $\overrightarrow{NP}$ ve $\overrightarrow{MN}$ vektörlerinin, yani P, M, N noktalarının, aynı doğru üzerinde olduğunu gösterir.

Şimdi de M, N, P noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu kabul edelim. $\alpha\beta\gamma = -1$ olduğunu göstereceğiz. $\overrightarrow{CP'} = -\frac{1}{\alpha\beta}\overrightarrow{P'A}$ olacak biçimde AC doğrusu üzerinde bir P' noktası vardır. O zaman $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP'} = -\frac{1}{\alpha\beta}\overrightarrow{P'A}$ ve $\alpha\beta(-\frac{1}{\alpha\beta}) = -1$'dir. İlk kısmın ispatından dolayı N, M, P' noktaları aynı doğru üzerindedir. O zaman P ve P' noktaları MN ve AC doğrularının kesişim noktaları olacaktır, yani $P' = P$'dir. Dolayısıyla $\alpha\beta\gamma = -1$ olur. □

Soru 1. *$ABCD$ bir paralelkenar olsun. M ve N, sırayla $[CD]$ ve $[DA]$ kenarlarının orta noktaları ve $[AM]\cap[BN] = \{O\}$ olsun. $|ON| : |OB|$ oranını bulunuz.*

Çözüm. $|NO| = n$ ve $|OB| = m$ diyelim. O noktası ABN üçgeninin $[BN]$ kenarını $n : m$ oranında bölmektedir. O zaman Teorem 1'den dolayı,

$$\overrightarrow{AO} = \frac{m\overrightarrow{AN}+n\overrightarrow{AB}}{m+n} = \frac{\frac{m}{2}\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AB}}{m+n}$$
$$= \frac{m}{2(m+n)}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

olur. Öte yandan, $\overrightarrow{AO}$ ve $\overrightarrow{AM}$ vektörleri aynı doğru üzerindedir, yani

$$\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}) = k\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$$

olacak biçimde k sayısı bulunabilir. Dolayısıyla

$$\frac{m}{2(m+n)}\overrightarrow{AD} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AB}$$

sağlanır. Fakat $\overrightarrow{AD}$ ve $\overrightarrow{AB}$ vektörleri paralel değildir. O zaman $\frac{m}{2(m+n)} = k$ ve $\frac{n}{m+n} = \frac{k}{2}$ olmalıdır. Son iki eşitlikten $\frac{m}{4(m+n)} = \frac{n}{m+n}$ ve $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$ bulunur. Dolayısıyla $|ON| : |OB| = 1 : 4$ olur. □

Soru 2. *$\overrightarrow{CN} = \alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM} = \beta\overrightarrow{CB}$ ve $[AM]\cap[BN] = \{O\}$ olacak biçimde ABC üçgeninin $[AC]$ ve $[BC]$ kenarları üzerinde sırayla N ve M noktaları alınsın. $|AO| : |AM|$ ve $|BO| : |BN|$ oranlarını bulunuz.*

Çözüm. $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA}$ eşitliğinden $\alpha\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{CA}$ ya da $\overrightarrow{NA} = (1-\alpha)\overrightarrow{CA}$ çıkar. Benzer şekilde $\overrightarrow{MB} = (1-\beta)\overrightarrow{CB}$'dir. AMC üçgeni ile $\overrightarrow{NB}$ doğrusuna Menelaus teoremini uygularsak,

$$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{1-\beta}\overrightarrow{MB} = \frac{1}{\beta-1}\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\alpha-1}{-\alpha}\overrightarrow{CA} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\overrightarrow{CA},$$

ve $\overrightarrow{MO} = x\overrightarrow{OA}$ buluruz. O zaman

$$\frac{1}{\beta-1}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)x = -1, \quad \text{ve} \quad x = \frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-1}$$

olur. Bu ise

$$\frac{|MO|}{|OA|} = \left|\frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-1}\right|$$

demektir. $0 < \alpha < 1$ ve $0 < \beta < 1$ olduğu kolayca görülebilir. O zaman

$$\overrightarrow{MO} = \frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha-1}\overrightarrow{OA}$$

dir. Fakat $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MA}$ eşitliğinde $\overrightarrow{MO}$ yerine az önce elde ettiğimizi kullansak,

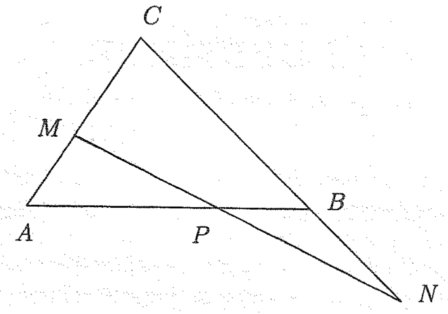
$$\frac{\alpha\beta-1}{\alpha-1}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{MA}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$|OA| : |MA| = \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}$$

dir. Benzer şekilde de $|BO| : |BN|$ oranı bulunur; bunu okuyucuya bırakıyoruz. □

Soru 3. *n bir pozitif tamsayı olsun. Bir ABC üçgeninde $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CB}$ olacak biçimde M ve N noktaları verilsin. $P = [AB]\cap[MN]$ olsun. P noktasının $[AB]$ ve $[MN]$ doğru parçalarını böldüğü oranları bulunuz.*

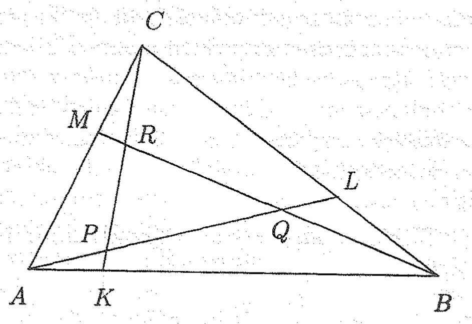


Çözüm. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$ verilen bilgilerden dolayı $\overrightarrow{CN}=-2\overrightarrow{BC}$ ve $\overrightarrow{MC}=\frac{n-1}{n}\overrightarrow{AC}$ ve dolayısıyla $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{n-1}\overrightarrow{MC}$ gerçeklenir. $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{PA}$ olsun. ABC üçgeni ile MN doğrusuna Menelaus teoremini uygulayalım. P,M,N noktaları aynı doğru üzerindedir ve $\overrightarrow{CN}=-2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{m-1}\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{PA}$ olur. Böylece

$$-2\left(\frac{1}{n-1}\right)x=-1$$

ya da $x=\frac{n-1}{2}$'dir; yani $|\overrightarrow{BP}|:|\overrightarrow{PA}|=\frac{n-1}{2}$ çıkar. Benzer şekilde $|\overrightarrow{MP}|:|\overrightarrow{PN}|$ oranı bulunur; bunu da okuyucuya bırakıyoruz. □

Soru 4. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ve $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ *olacak biçimde* ABC *üçgeninin kenarları üzerinde* K,L,M *noktaları verilsin.* $[AL]$, $[BM]$ *ve* $[CK]$ *doğru parçalarının kesiştiği noktalar* PQR *üçgenini oluştursun.* P,Q,R *noktalarının sırayla* $[AQ]$, $[BR]$ *ve* $[CP]$ *doğru parçalarının orta noktaları olduğunu ispatlayınız.*



Çözüm. ALC üçgeni ile MB doğrusuna Menelaus teoremini uygulayalım. $\overrightarrow{CB}=-3\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{LQ}=\beta\overrightarrow{QA}$ ve $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC}$ olduğu kolayca görülebiliyor. O zaman $-2(\beta)3=-1$, yani $\beta=\frac{1}{6}$'dır. Dolayısıyla $\overrightarrow{LQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{QA}$'dır. Benzer şekilde, $\overrightarrow{MR}=\frac{1}{6}\overrightarrow{RB}$ ve $\overrightarrow{KP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}$ olduğu gösterilir. $|\overrightarrow{AP}|=n$ ve $|\overrightarrow{PQ}|=m$ diyelim. O zaman $|\overrightarrow{LQ}|=\frac{m+n}{6}$'dır. Teorem 1'den dolayı

$$\overrightarrow{CP}=\frac{6}{7}\overrightarrow{CK}=\frac{6}{7}\left(\frac{2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{3}\right)=\frac{4}{7}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{7}\overrightarrow{CB}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=\frac{\left(\frac{m+n}{6}+m\right)\overrightarrow{CA}+n\overrightarrow{CL}}{7\left(\frac{n+n}{6}\right)}\\&=\frac{\frac{7m+n}{6}\overrightarrow{CA}+\frac{2n}{3}\overrightarrow{CB}}{7\left(\frac{m+n}{6}\right)}\\&=\frac{7m+n}{7(m+n)}\overrightarrow{CA}+\frac{4n}{7(m+n)}\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

dir. $\overrightarrow{AC}$ ve $\overrightarrow{CB}$ vektörleri paralel olmadığından, bunların $\overrightarrow{CP}$ için elde ettiğimiz iki ifadedeki katsayılarını eşitleriz ve

$$\frac{4}{7}=\frac{7m+n}{7(m+n)}\quad\text{ve}\quad\frac{2}{7}=\frac{4n}{7(m+n)}$$

elde ederiz. Buradan $m=n$ çıkar. Bu da P noktasının $[AQ]$ doğru parçasının orta noktası olduğunu gösterir. Benzer şekilde, Q ile R'nin sırayla $[BR]$ ve $[CP]$ doğru parçalarının orta noktaları olduğu gösterilir. □

Aşağıdaki soruları okuyucuya bırakıyoruz.

Soru 5. *Bir* $ABCD$ *paralelkenarının* $[AD]$ *kenarı üzerinde* $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ *olacak biçimde* M *noktası ve* $[AC]$ *köşegeni üzerinde de* $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ *olacak biçimde* K *noktası alınsın.* $\overrightarrow{MK}$ *ve* $\overrightarrow{KB}$ *vektörlerinin aynı doğru üzerinde olduğunu ispatlayınız ve* $|\overrightarrow{MK}|:|\overrightarrow{KB}|$ *oranını bulunuz.*

Soru 6. *Bir* $AMNO$ *paralelkenarının* $[ON]$ *kenarı üzerinde* $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$ *olacak biçimde* B *noktası ve* $[OM]$ *köşegeni üzerinde* $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{OM}$ *olacak biçimde* C *noktası alınsın.* A,B,C *noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu ispatlayınız.*