$\ln\varphi$'nin ikinci türevine λ diyelim. λ da periyodiktir ve periyodu 1'dir. λ, $[0,1]$ aralığında sürekli ve bunun sonucu olarak orada sınırlıdır. Periyodiklik gereği bütün gerçel sayılarda sınırlı olur; yani öyle bir M sayısı vardır ki, her gerçel x için $|\lambda(x)| \le M$ sağlanır. Öte yandan $(*)$'ın her iki tarafının logaritmasını ve sonra iki kere türevini alınca

$$\frac{1}{4}\left(\lambda\left(\frac{x}{2}\right)+\lambda\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)=\lambda(x)$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}|\lambda(x)| &\le \frac{1}{4}\left|\lambda\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\frac{1}{4}\left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \\ &\le \frac{M}{4}+\frac{M}{4}=\frac{M}{2}\end{aligned}$$

çıkar. Bu işlemi tekrarlarsak, $|\lambda|$'nın üst sınırını istediğimiz kadar ufaltabileceğimizi görürüz. Sonuç olarak her gerçel x için $\lambda(x)=0$'dır. λ'nın tanımından bu $\ln\varphi(x)=ax+b$ olması demektir. $\ln\varphi$'nin periyodikliğinden $a=0$ olmalıdır; yani φ sabit bir fonksiyondur. $\varphi(0)=\pi$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla her gerçel x için $\varphi(x)=\pi$'dir.

Şimdi elimizde

$$\sin\pi x=\frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=\frac{\pi}{-x\Gamma(x)\Gamma(-x)}$$

var. Bu da Γ için bir başka fonksiyonel denklemdir. Weierstrass çarpım formülünü burada kullanırsak

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

elde ederiz. Bu formülün değişik bir elde edilişi **[3]**'te var. Aslında bu formül polinomlar için bildiğimiz bir özelliğin $\sin\pi x$ için yazılmışı. Bilindiği gibi her polinom köklerine ait çarpanların çarpımı olarak yazılabilir; tabii polinomların sonlu tane kökü vardır. Yukarıdaki formül bize sonsuz tane kökü olan $\sin\pi x$ gibi bazı fonksiyonların da köklerine ait çarpanların çarpımı olarak yazılabileceğini söylüyor.

KAYNAKÇA

[1] E. Artin, *The Gamma Function*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1964.

[2] H. Bohr & J. Mollerup, *Laerebog i Matematisk Analyse*, Kopenhag, 1922.

[3] N. Çalışkan, *Bir Algorist: Leonhard Euler*, *Matematik Dünyası*, **5**, sayı 5, 13–15 (1995).

[4] H. T. Kaptanoğlu, *Dışbükey Fonksiyonlar*, *Matematik Dünyası*, **6**, sayı 1, 11–18 (1996).

[5] M. A. Kocatepe, *L'Hôpital Kuralı Üstüne*, *Matematik Dünyası*, **4**, sayı 2, 15–17 (1994).

YUNANİSTAN'DA ÜNİVERSİTE GİRİŞ SINAVLARI

Şafak Alpay *

Yunanistan'da lise mezunları üniversiteye girmek istediklerinde, girmek istedikleri programlara göre, dört tür sınava girmek zorundalar. Örneğin, mühendislik veya temel bilimler okumak isteyen öğrenciler, konuları matematik, fizik, kimya ve kompozisyondan oluşan yazılı sınavlara alınıyorlar. Kağıtlar iki farklı kişi tarafından değerlendiriliyor ve not farkı üç puandan fazla olduğu zaman üçüncü bir hakem gerekiyor. Alınan notlar sıralanıyor ve kontenjan durumuna göre öğrenciler programlara giriyorlar.

Bu ülkedeki yedi matematik bölümüne girebilmek için öğrencilerin geçen yıl yanıtlamak zorunda oldukları problemleri *Matematik Dünyası* okurlarına sunuyoruz. Tüm sorularının yanıtlanması gereken sınavın süresi ise 3 saat.

Soru 1

(A) n bir pozitif tamsayı, I ve O, sırası ile, $n\times n$ birim ve sıfır matrisleri olsunlar. A ve B, $A=B^2+I$ ile $B^4=O$ eşitliklerini sağlayan matrisler ise,

(i) Her m pozitif tamsayısı için, $A^m = I+mB^2$ olduğunu kanıtlayınız;

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

(ii) $I + A^6 - A^8$ matrisinin tersinin olduğunu gösteriniz;

(iii) n bir tek sayı ise, $\det(2A - 3I) \leq 0$ olduğunu gösteriniz.

(B) (i) Herhangi iki z_1, z_2 karmaşık sayısı için $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$ eşitliğinin doğru olması için gerekli ve yeterli koşulun $z_1\overline{z_2}$ sayısının gerçel kısmının sıfır olması olduğunu gösteriniz.

(ii) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $ab \neq 0$ olmak üzere $z = a^2 + if(a)$ ve $w = f(b) + ib^2$ ile tanımlanan karmaşık sayıları düşünelim. Eğer $|w|^2 + |z|^2 = |w - z|^2$ ise $f(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığı içinde en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

Soru 2

(A) $0 < a < b$ olmak üzere $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ve $C_2 : a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ elipslerini düşünelim. $0 < x$ ve $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, $y = (\tan\phi)x$ doğrusunun C_1 elipsini $P_1 = (x_1, y_1)$ noktasında ve C_2 elipsini $P_2 = (x_2, y_2)$ noktasında kestiğini varsayalım.

(i) C_1 elipsine P_1 noktasında çizilen teğetin eğimi λ_1 ve C_2 elipsine P_2 noktasında çizilen teğetin eğimi λ_2 ise, $\lambda_1\lambda_2 = (\tan\phi)^{-2}$ olduğunu gösteriniz.

(ii) $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ve $f(\phi) = \lambda_1\lambda_2$ olarak tanımlanan fonksiyonun azalan ve artanlığını araştırınız.

(B) n, $(1+i)^n = 16$ eşitliğini sağlayan pozitif bir tamsayı olsun. $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ da eşit olasılık olaylarının uzayı olsun. Ω içinden keyfi bir λ seçelim ve $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 2x^2 - 4x + \lambda$ tanımlayalım. $f(x) = 0$ denkleminin gerçel kökünün olmaması olasılığını bulunuz.

Soru 3

(A) a ve b, $a < b$ sağlayan gerçel sayılar olsun. $f(x) = (x-a)^5(x-b)^3$ ise,

(i) $x \neq a$ ve $x \neq b$ için

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-a} + \frac{3}{x-b}$$

olduğunu gösteriniz.

(ii) $g(x) = \ln|f(x)|$ fonksiyonunun (a, b) aralığında içbükey olduğunu gösteriniz.

(B) (i) $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli f fonksiyonu (a, b)'deki her x için $f'(x) > 0$ sağlıyorsa, f'nin $[a, b]$'de kesin artan bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve $f'(x) > 0$ olsun. Verilen a, b gerçel sayıları için

$$F(x) = \int_a^b f(x-t)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ile tanımlanan F fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu, ve bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $F'(x_0) = 0$ ise, her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Soru 4

(A) $0 < a < b$ sağlayan iki gerçel sayı ve

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

koşulunu sağlayan sürekli bir $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu düşünelim. $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt$$

ile tanımlanmışsa, $(x_0, g(x_0))$ noktasında g'nin teğetinin x eksenine paralel olduğunu ve $g(x_0) = 2 + f(x_0)$ eşitliğini sağlayan en az bir $x_0 \in (a, b)$ noktasının varlığını gösteriniz.

(B) $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ olan, sürekli ikinci türeve sahip, ve $f(0) = 1995$, $f'(0) = 1$ ve

$$1 + \int_0^x f''(t)\cos t\,dt = \cos^2 x + \int_0^x f'(t)\sin t\,dt$$

eşikliklerini sağlayan f fonksiyonunu bulunuz.