PARALELLİK AKSİYOMU ÜZERİNE

Şafak Alpay *

Elemanlar adlı kitabın yazarı Öklit'in (M.S. 3. yüzyıl) matematik tarihinde özel bir yeri vardır. *Elemanlar*, o zamana kadar bilinen matematiğin büyük bir kısmını içermekte ve 13 kitaptan oluşmakta idi. Öklit'in dehası aykırı ve izole gibi görünen sonuçları kısıtlı sayıda aksiyomdan yola çıkarak, mantıksal bir sistematikle bir bütün halinde elde etmiş olmasıdır.

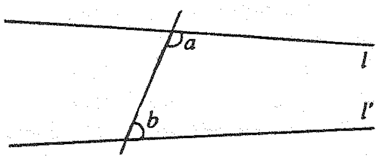
Öklit, *Elemanlar* adlı kitabını yazarken sadece aşağıdaki beş aksiyomdan yola çıkmıştı [1]. Bunlar,

1. herhangi iki noktayı birleştiren doğru çizilebilir;
2. düzlemde sonlu bir doğru parçası sürekli olarak devam ettirilebilir;
3. keyfi merkez ve yarıçaplı çember çizilebilir;
4. tüm dik açılar eşittir;

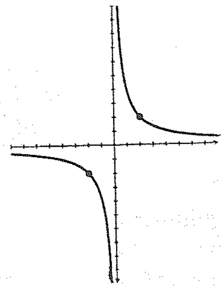
aksiyomları ile bu yazının konusu olan,

5. paralellik aksiyomu

olarak da anılan, belki de en iyi bir şekil yardımı ile anlaşılan aksiyom.



Aksiyoma göre, a ve b açılarının toplamı iki dik açıdan küçükse, ℓ ve ℓ' doğruları, açıların olduğu tarafta bir noktada kesişirler. Paralellik aksiyomu, aksiyomlardan beklenen derecede besbelli değildir. Açıların seçimine bağlı olarak kesiştikleri söylenen noktayı görmek de olası değildir. Üstelik



şekilde grafiği görünen hiperbol örneğinde olduğu gibi kesişmeyen ama paralel de olmayan eğrilerin varlığı aksiyomun anlaşılabilirliğini biraz daha zorlaştırıyor. x pozitif (veya negatif) sayılarda büyürken $\frac{1}{x}$, $y = 0$ doğrusuna istenildiği kadar yaklaşır ama onu hiçbir zaman kesmez. Asimtot olma olarak da betimlenen durumu, x sıfıra sağdan (veya soldan) yaklaşırken $\frac{1}{x}$'in yine sergilediği görülüyor. Bazıları Öklit'in paralellik aksiyomunun kullanımını birinci kitabın 29. önermesine kadar ertelemiş olmasını kendisinin de bu aksiyomdan pek memnun olmadığının kanıtı olarak verirler.

Öklit geometrisini paralellik aksiyomundan kurtarmak, onu daha kolay anlaşılır bir başkası ile değiştirmek; daha da iyisi, onu diğer aksiyom ve önermelerden teorem olarak elde etmeye çalışmak matematikçilerin yüzyıllarca uğraştığı bir problem olmuştur. Bu çalışmalar sonuçta paralellik aksiyomuna denk olduğu anlaşılan yeni aksiyomlar ortaya çıkarmışlarsa da, bu uğraşların en önemli katkısı paralellik aksiyomunun geçerli olmadığı yepyeni bir geometrinin doğmasına neden olmalarıdır.

Okul kitaplarında paralellik aksiyomunun yukarıdaki ifadesi yerine bir doğruya dışındaki bir noktadan sadece tek bir paralel çizilebileceğini söyleyen aksiyom verilir. Bu, Öklit'in paralellik aksiyomuna denk bir aksiyomdur ve beşinci yüzyılda Proclus tarafından bulunmuştur, ama çok sonraları bunu yeniden keşfeden John Playfair'in (1748–1819) anısına Playfair aksiyomu olarak anılır. İki aksiyomun denkliği ile

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

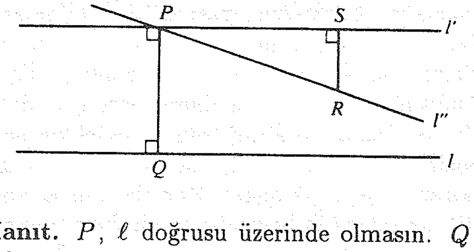
söylenmek istenen, paralellik aksiyomunun Playfair aksiyomunu gerektirdiği ve tersine Playfair aksiyomunun paralellik aksiyomunun gerektirdiğidir. Playfair'in, Öklit'in ilk altı kitabını yeniden ele aldığı *Geometrinin Elemanları* adlı yapıtı, 1795–1846 yılları arasında en az on kez basılmış ve belki de bu popülerliği nedeniyle Playfair aksiyomu paralellik aksiyomunun yerini almıştır. Esasında Playfair aksiyomunun göreceli bir üstünlüğü de vardır. Öklit'in aksiyomu kesişen doğrular hakkında iken Playfair aksiyomu gerçekten paralel doğrular hakkındadır.

Öklit'in paralellik aksiyomunu kanıtlama veya değiştirme uğraşıları paralellik aksiyomuna, yukarıdaki anlamda denk olan, birçok önerme ortaya çıkarmıştır. Bunlar arasında

1. paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser;
2. birbirlerinden uzaklıkları her yerde eşit olan doğrular vardır;
3. bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açıya eşittir;
4. herhangi bir üçgene benzer ama eşit olmayan üçgen vardır;
5. paralel iki doğrunun ikisine de dik doğru vardır;
6. doğrudaş olmayan üç noktadan bir çember geçer;
7. aynı doğruya paralel doğrular paraleldirler;

önermelerini sayabiliriz.

Paralellik aksiyomu üzerine yazanların öncüsü Proclus'tur. Astronom Ptolemy'nin paralellik aksiyomu hakkındaki bir yazısındaki yanlış üzerine yazan Proclus, daha sonra Playfair aksiyomunu kanıtlar. Bu harikulade basit usavuruşun üstünden hep beraber geçelim:

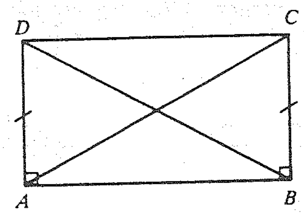


Kanıt. P, ℓ doğrusu üzerinde olmasın. Q, P noktasından ℓ doğrusuna inilen dikmenin ayağı olsun. ℓ', PQ doğrusuna P noktasında dik ise, ℓ ve ℓ', PQ ile aynı açıyı yaptıklarından paraleldirler. P noktasından geçen başka her doğrunun ℓ doğrusunu kestiğini göstermek, P'den geçen ve ℓ doğrusuna paralel tek doğrunun ℓ' olduğunu göstermek için yeterlidir. ℓ'' böylesi bir doğru ve R, ℓ'' üzerinde bir nokta ve ℓ', ℓ arasında olsun. S, R noktasından ℓ' doğrusuna inilen dikmenin ayağı ise, RS uzaklığı, R, ℓ'' üzerinde P noktasından uzaklaştıkça büyür. Sonunda ℓ'' doğrusu ℓ doğrusunu kesmek zorunda kalacaktır. □

Ancak Proclus'un kanıtına dikkatlice bakarsak, paralel iki doğru arasındaki uzaklığın her yerde aynı ve sınırlı olduğunun kabul edildiğini görürüz. Öklit'in diğer aksiyomlarında böylesi bir varsayımı haklı kılacak nedenler yoktur. Paralel doğrular arasındaki uzaklığın değişmez olmasının paralellik aksiyomunun gerektirdiği biliniyor. Yani, Proclus paralellik aksiyomunu kanıtlıyacağım derken onu kullanarak temel bir hata yapıyordu.

Paralellik aksiyomunu kanıtlama çabalarında aksiyomun kendisi bilinçli veya bilinçsiz, açık veya kapalı bir biçimde işin içine giriyordu ve sonuçta paralellik aksiyomu kanıtlanamadı. Geometrinin düşmanı olarak da anılan paralellik aksiyomu konusunda çalışmalar tümü ile de meyvesiz olmamıştır. Kendileri farkında olmasalar da Saccheri, Lambert ve Legendre'ın çalışmaları yeni bir geometrinin doğuşunu müjdeliyordu. Acaba paralellik aksiyomu olmadan nasıl bir geometri yapılabilirdi? Pavia Üniversitesi'nde çalışan bir Cizvit papazı olan Gerolamo Saccheri (1667–1733) böylesi bir uğraşıya ilk girenlerdendir.

Saccheri bu konudaki araştırmalarında A ve B açılarının dik açılar ve $AD = BC$ olduğu $ABCD$ dörtgenini kullanıyordu.



Saccheri paralellik aksiyomu ve ona bağlı bir sonuç kullanmadan kenar-açı-kenar bağıntısı (Öklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 4) ile BAD ve ABC üçgenlerinin eşitliklerini, buradan da $BD = AC$ elde ediyordu. Buradan kenar-kenar-kenar bağıntısı (Öklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 8) ile ADC ve BCD

üçgenlerinin eşitliğini elde edip, $\sphericalangle C = \sphericalangle D$ sonucuna varıyordu. Şimdi $\sphericalangle C$ ve $\sphericalangle D$ için üç olasılık vardı:

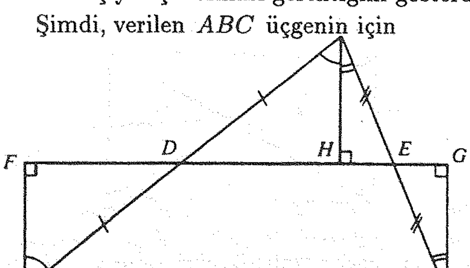
1. $\sphericalangle C = \sphericalangle D > 90^0$ (geniş açı hipotezi);
2. $\sphericalangle C = \sphericalangle D < 90^0$ (dar açı hipotezi);
3. $\sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^0$ (dik açı hipotezi).

Paralellik aksiyomu 3. hipoteze denk olduğundan, 1. veya 2. hipotezler ile varılacak bir çelişki paralellik aksiyomunu kanıtlayacaktı. Geniş açı hipotezi ile bir çelişkiye kolayca varan Saccheri, aynı başarıyı dar açı hipotezi ile elde edemedi. Bu hipotez ile elde ettiği teoremler tutarlılık ve güzellik açısından Öklit geometrisindekilerden aşağı değildiler. Ancak bir çelişki peşinde olan Saccheri'nin yeni bir geometri bulduğunun farkına varamamış olması ile insanlık en az bir yüzyıl kaybetmiş oldu.

Saccheri'nin yapıtları ile Berlin Akademisi'nde Euler ve Lagrange'in çalışma arkadaşı olan Johann Heinrich Lambert'in (1728–1777) çalışmaları arasında çok benzerlik vardır. Lambert, üç açısının dik açı olduğu bir dörtgen alır ve dördüncü açının geniş, dar veya dik açı olma durumlarını düşünür. Dördüncü açının geniş açı olması durumunda paralellik aksiyomunu elde ederek bir çelişkiye varan Lambert, dar açı hipotezi altında bir çelişkiye varamadığının farkında idi. Lambert bu arada hiç kimsenin farkına varamadığı bir gerçeği de gördü. Paralellik aksiyomunun eksikliğinde bir üçgenin iç açılarının toplamı, üçgenin alanının arttığı oranda azalıyordu!

Saccheri geniş açı, dar açı veya dik açı hipotezlerinin bir üçgenin iç açıların toplamının sırayla 2 dik açıdan büyük, 2 dik açıdan küçük veya 2 dik açıya eşit olması gerektiğini gösterdi.

Şimdi, verilen ABC üçgenin için



D ve E sırayla AC ve BC kenarlarının orta noktası olsunlar. D ve E noktalarından geçen doğru parçasına A, B ve C-noktalarından inilen dikmelerin ayaklarını F, G ve H ile gösterelim. AFD ve CHD üçgenleri eşit üçgenlerdir. BHE ve CHE üçgenleri de kenar-açı-açı (Oklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 26) bağıntısından dolayı eşit üçgenlerdir. Buradan $AF = CH = BG$ elde ederiz. Bu ise $ABGF$ dörtgeninin F ve G açılarının dik açı olduğunu verir. Böylelikle

$$\sphericalangle FAB = \sphericalangle FAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle HCD + \sphericalangle DAB$$

olacaktır. Öte yandan,

$$\sphericalangle GBA = \sphericalangle GBE + \sphericalangle EBA = \sphericalangle HCE + \sphericalangle EBA$$

eşitliklerini toplayarak

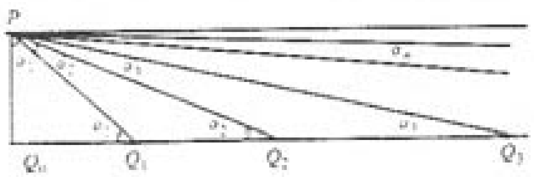
$$\begin{aligned} \sphericalangle FAB + \sphericalangle GBA &= \sphericalangle DAB + (\sphericalangle HCD \\ &\quad + \sphericalangle HCE) + \sphericalangle EBA \\ &= \sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle B \end{aligned}$$

Başka bir deyişle, $ABGF$ dörtgenin taban açıları ile ABC üçgeninin iç açıları toplamı eşittir. Bu bilgilerden sonra eğer geniş açı hipotezinin, bir üçgenin iç açıları toplamının iki dik açıdan (veya dar açı hipotezinin iç açılar toplamını iki dik açıdan küçük) büyük demek olduğunu kolaylıkla görürüz.

Paralellik aksiyomuna en fazla emek verenlerin biri de ünlü Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre (1752–1833) idi. 18. yüzyılda geometrinin üniversite programlarına alınması ile geometriye yeniden ilgi doğdu. Örneğin Kuzey Amerika'nın en eski yüksek öğrenim kurumlarından olan Yale Üniversitesi'nde (kuruluşu 1701) 1733'te Öklit'in *Elemanlar*'ının okutulduğunu ve bunun *Elemanlar*'ın yüksek öğretimde ilk kullanımı olduğunu biliyoruz. Amerika'nın en eski yüksek öğrenim kurumu olan Harvard Üniversitesi'nde (kuruluşu 1636) yine Öklit'in *Elemanlar*'ının 1737'de okutulduğu biliniyor. Bu gelişmeler yeni geometri kitaplarına gereksinim yarattı ve birçok kitap yazıldı. Britanya adalarında *Elemanlar*'a sadık kalınarak, bu eser yüzyıllar boyunca uğradığı değişikliklerden ve yanlışlardan arındırılmaya çalışılırken, Fransızlar *Elemanlar*'a eleştirel gözle bakıyorlardı. Sonuçta Legendre'ın 1794'de yazdığı *Eléments de Géométrie*, yazılan tüm kitapların en iyisi olarak görüldü. Bu yapıtta tamlık ve titizlikte ödün vermeden kanıtlar kolaylaştırılıyor ve Öklit'in geometrisinin önermeleri çok daha farklı bir sırada ele alınıyordu. Böylelikle hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin vazgeçemediği bir kitap ortaya çıkmıştı. Kanıtlarının açıklığı ve stilinin çekiciliği Legendre'ın kitabını tüm zamanların en iyi ders kitabı yapmıştır. Yazarın ölümünden önce 20 kez basılmış ve 100.000'den fazla satılmıştı. Öte yandan bağımsızlık savaşının etkisi ile olacak, A.B.D. ve Fransa'nın yakınlaşması sonuç olarak, 1819 ve 1822'de başarılı tercümeleri nedeni ile A.B.D.'de de Legendre'ın yapıtının Öklit'in *Elemanlar*'ının yerini almasını sağlıyor ve sadece bu ülkede 30 baskı yapılıyor. Böylesine değerli bu kitabın diğer bir önemi de Legendre'ın 40 yıl boyunca süren paralellik aksiyomu konusundaki araştırmalarının bu kitabın çeşitli baskılarında ekler olarak yayınlanmış olmasıdır. Legendre da paralellik aksiyomu çalışmalarında bu aksiyoma denk aksiyomlar bulmuştur. Bunlar doğrudaş olmayan üç noktadan bir çember geçmesi ve benzer fakat farklı bir büyüklükte üçgenlerin varlığı idi. Legendre da önceleri Saccheri ve Lambert gibi paralellik aksiyomu ile bir üçgenin iç açılar toplamı arasında ilişkiyi çalışmıştı. İşte bunlardan biri:

Teorem. *Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° ise. Öklit'in paralellik aksiyomu doğrudur.*

Kanıt. Playfair aksiyomunu göstermek yeterli olacaktır.



$P \notin \ell$ alalım. P den ℓ doğrusuna inilen dikmenin ayağı Q_0 olsun ve ℓ', P noktasında ℓ doğrusuna çizilen paralel olsun. (ℓ', P noktasında PQ_0 doğrusuna dik olarak elde edilebilir.) ℓ''nün çizilebilecek tek paralel olduğunu görmek için şekilde görüldüğü gibi $Q_0Q_1 = PQ$, $Q_1Q_2 = Q_1P$, $Q_2Q_3 = Q_2P$, $\ldots$, $Q_nQ_{n+1} = Q_nP$ sağlamak üzere $Q_0 = Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ noktalarını alalım. Q_i noktalarının seçimi ile hepsi de ikizkenar üçgenler olan Q_0PQ, Q_1PQ_2, $\ldots$, Q_nPQ_{n+1}, $\ldots$ üçgenler dizisini elde ederiz. İşimizi kolaylaştırmak için $\alpha_n = \sphericalangle Q_{n-1}PQ_n = \sphericalangle Q_{n-1}Q_nP$ $(n = 1, 2, \ldots)$ diyelim. $\sphericalangle Q_{n-1}Q_nP$ ve $\sphericalangle PQ_nQ_{n+1}$ birbirlerini tümleyen açılar olduklarından, her $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\alpha_n + \sphericalangle PQ_nQ_{n+1} = 180^\circ \qquad (1)$$

elde edilir. Bir üçgenin iç açıların toplamının 180° olduğunu Q_nPQ_{n+1} üçgenlerine uygulayarak

$$\sphericalangle PQ_nQ_{n+1} + 2\alpha_{n+1} = 180^\circ \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

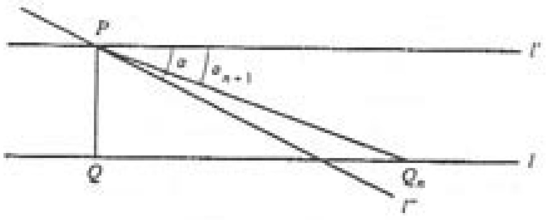
buluruz. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\alpha_n = 180^\circ - \sphericalangle PQ_nQ_{n+1} = 2\alpha_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

bulunur. Buradan

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2}, \ \alpha_3 = \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1}{2^2}, \ \cdots, \ \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{\alpha_1}{2^n}$$

elde ederiz.



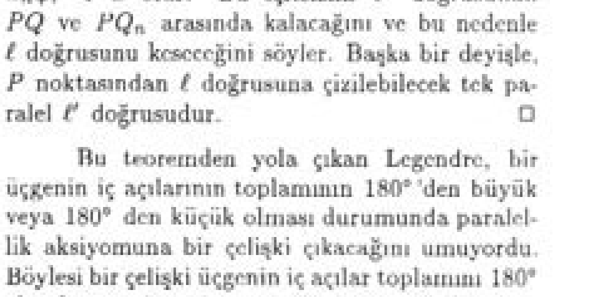
ℓ'', P'den geçen başka bir doğru ve α da ℓ'' ile ℓ' arasındaki açı ise, n yeteri kadar büyük seçilerek $\alpha_1/2^n$, α'dan küçük yapılabilir. Yani, $\alpha_{n+1} < \alpha$ olur. Bu eşitsizlik ℓ'' doğrusunun PQ ve PQ_n arasında kalacağını ve bu nedenle ℓ doğrusunu keseceğini söyler. Başka bir deyişle, P noktasından ℓ doğrusuna çizilebilecek tek paralel ℓ' doğrusudur. □

Bu teoremden yola çıkan Legendre, bir üçgenin iç açılarının toplamının 180°'den büyük veya 180° den küçük olması durumunda paralellik aksiyomuna bir çelişki çıkacağını umuyordu. Böylesi bir çelişki üçgenin iç açılar toplamını 180° olarak verecek ve buna denk olan paralellik aksiyomu kanıtlanmış olacaktır.

Aşağıdaki yardımcı teorem bu amaç için önemli bir adımdı:

Yardımcı Teorem. $\sphericalangle A$, ABC *üçgeninin keyfi bir açısı olsun.* ABC *üçgeni ile iç açıları toplamı aynı, ancak* $\sphericalangle A_1 \leq \frac{1}{2}\sphericalangle A$ *koşulunu sağlayan bir* A_1 *açısına sahip olan bir* $A_1B_1C_1$ *üçgeni vardır.*

Kanıt. D noktası BC kenarının orta noktası olsun ve AD doğru parçasını $AD = DE$ olacak şekilde uzatıp bir E noktası alalım.



$BD = DC$, $AD = DE$ ve $\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDE$ (Öklit, *Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 15) olduğundan BDA ve CDE üçgenleri kenar-açı-kenar bağıntısından eşittirler. Üçgenlerin eşitliğinden $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 6$, $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 5$ bulunur. Dolayısı ile ACE ile ABC üçgenlerinin iç açılar toplamı eşit olacaktır. $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 6 = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = \sphericalangle A$ olduğundan ya $\sphericalangle 2 \leq \frac{1}{2}\sphericalangle A$ veya $\sphericalangle 3 \leq \frac{1}{2}\sphericalangle A$ olmalıdır. Eğer $\sphericalangle 2 \leq \frac{1}{2}\sphericalangle A$ ise, aranılan üçgen ACE üçgeni, eğer $\sphericalangle 3 \leq \frac{1}{2}\sphericalangle A$ ise, aranılan üçgen yine ACE üçgeni, açı ise E açısıdır. □

Yukarıdaki sonuç ile Legendre iç açılar toplamının 180° 'den büyük olamıyacağını kolaylıkla gösterebiliyordu. Saccheri bu teoremi Legendre'den yüz yıl önce göstermiş olmasına karşın, aşağıdaki teorem Legendre'nin ilk teoremi olarak biliniyor:

Teorem. *Bir üçgenin iç açılar toplamı 180° 'den küçük veya ona eşittir.*

Kanıt. Bir çelişki elde etmek umudu ile $\alpha > 0$ olmak üzere iç açılarının toplamı $180° + \alpha°$ olan bir ABC üçgeninin var olduğunu kabul edelim. Yardımcı teoremi kullanarak, iç açıları toplamı $180° + \alpha°$ olan ve bir açısı A_1'in $\sphericalangle A_1 \leq \frac{1}{2}\sphericalangle A$ olduğu bir $A_1B_1C_1$ üçgeni bulabiliriz. Yardımcı teoremi bu sefer $A_1B_1C_1$ üçgenine uygulayarak, iç açıları toplamı $180° + \alpha°$ olan ve A_2 açısının

$$\sphericalangle A_2 \leq \frac{1}{2}\sphericalangle A_1 \leq \frac{1}{2^2}\sphericalangle A$$

olduğu bir $A_2B_2C_2$ üçgeni bulabiliriz. Tümevarımla iç açıları toplamları $180° + \alpha°$ olan ve bir açıları, diyelim A_n,

$$\sphericalangle A_n \leq \frac{1}{2^n}\sphericalangle A$$

koşulunu sağlayan $A_nB_nC_n$ üçgen dizisi bulabiliriz. n yeteri kadar büyük seçilerek, $\frac{1}{2^n}\sphericalangle A < \alpha$ ve dolayısı ile $\sphericalangle A_n < \alpha$ sağlanabilir. Şimdi

$$180° + \alpha° = \sphericalangle A_n + \sphericalangle B_n + \sphericalangle C_n < \alpha + \sphericalangle B_n + \sphericalangle C_n$$

eşitsizliği $\sphericalangle B_n + \sphericalangle C_n > 180°$ verir ki bu aranılan çelişkidir. Zira Öklit'in (*Elemanlar*, Kitap 1, Önerme 17) bir önermesine göre bir üçgenin herhangi iki açısının toplamı 180° 'den büyük olamaz.

Yukarıdaki teorem ile üçgenin iç açılarının toplamının 180° 'den büyük olamayacağını gösteren Legendre için yapılacak iş, iç açılar toplamının 180° 'den küçük olamıyacağını da göstermekti. Verdiği "kanıt" gerçekten iç açılar toplamının negatif olduğunu veren bir çelişkiye yol açıyordu, ama .... Aması, tahmin edebileceğiniz gibi, kanıtı, sonraları paralellik aksiyomuna denk olduğu anlaşılan bir sav kullanıyordu. Bu sav, bir açının içindeki bir noktadan, açının kollarını kesecek biçimde doğruların çizilebileceği savı idi.

Paralellik aksiyomu hakkında kimi başka bilgileri *Bilim ve Ütopya* dergisinin Şubat 1995 sayısında bulabilirsiniz.

KAYNAKÇA

[1] Ş. Alpay, *Öklit ve Elemanlar'ı*, *Bilim ve Ütopya*, Kasım (1994).

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + (b-a)(b+a), \\ b^3 &= a^3 3ab(b-a) + (b-a)^3, \\ (a+1)^4 &= a^4 + \frac{1}{2}[(2a+1)^3 + 2a + 1] \end{aligned}$$

özdeşliklerini, doğal sayıların karelerini, küplerini ve dördüncü kuvvetlerini kolayca hesaplamak için kullanabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} 28^2 &= 25^2 + (28-25)(28+25) \\ &= 625 + 3 \cdot 53 = 784, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21^3 &= 20^3 + 3 \cdot 20 \cdot 21(21-20) + (21-20)^3 \\ &= 8000 + 1260 + 1 = 9261, \\ 11^4 &= 10^4 + \frac{1}{2}[(20+1)^3 + 20 + 1] \\ &= 10000 + \frac{1}{2}[9261 + 21] \\ &= 10000 + 4641 = 14641. \end{aligned}$$

Kıvanç Anıl Çelik
Çankaya Atatürk Anadolu Lisesi
Orta Kısım üçüncü sınıf öğrencisi