3. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI

Albert Erkip *

3. Ulusal Matematik Olimpiyadı'nın birinci aşama sınavı 29–30 Nisan 1995'te 799 öğrencinin katılımıyla 20 merkezde yapılmıştı. Bu sınav sonucunda 44 öğrencinin katılmaya hak kazandığı ikinci aşama sınavı diğer bilim olimpiyatlarıyla beraber 8–9 Aralık 1995'te Ankara'da yapıldı. Bu sınavın sorularını aşağıda bulacaksınız.

İkinci aşama sınavı sonuçlarına göre, 11 Aralık 1995 günü TÜBİTAK Feza Gürsey Salonu'nda yapılan törende Mehmet Ekmekçi (İzmir Semra Yiğitalp Lisesi) ve Yılmaz Koçer (İzmir Fen Lisesi) altın, Ali Ekber Gürel (İzmir Özel Yamanlar Fen Lisesi), Özgür Sümer (İzmir Fen Lisesi), Suat Namlı (İstanbul Özel Fatih Erkek Fen Lisesi) ve Umut Akdemir (Antalya Özel M. C. Ünal Fen Lisesi) gümüş, Mustafa Günseli (Ankara Özel Samanyolu Erkek Fen Lisesi), Fatih Sulak (İzmir Özel Yamanlar Fen Lisesi), Gülay Ünel (İzmir Fen Lisesi), Osman Toptan (Ankara Özel Samanyolu Erkek Fen Lisesi) ve Müjdat Tiryaki (İzmir Fen Lisesi) bronz madalyalarını aldılar.

Birinci Gün, 8 Aralık 1995

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

1. $m_1, m_2, \ldots m_k$, $2 \leq m_1$ ve $2m_i \leq m_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. Bu durumda, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

bağıntılarından hiçbirini gerçeklemeyen sonsuz sayıda x tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

2. Dar açılı bir ABC üçgeni ile bu üçgenin düzleminde, üçgenin $[BC], [CA], [AB]$ kenarlarını sırayla çap kabul eden k_1, k_2, k_3 çemberleri çiziliyor. Çemberlerin kuvvet merkezi K, $[AK] \cap k_1 = \{D\}$, $[BK] \cap k_2 = \{E\}$ ve $[CK] \cap k_3 = \{F\}$ olmak üzere, alan$(\Delta ABC) = u$, alan$(\Delta DBC) = x$, alan$(\Delta ECA) = y$ ve alan$(\Delta FAB) = z$ ise, $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ olduğunu ispatlayalınız.

3. $\mathbb{N}$, pozitif tamsayılar kümesi olsun. Bir A gerçel sayısı ile $a_1 = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq A$$

koşulunu sağlayan, üstten sınırlı olmayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi veriliyor.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 < \frac{A^{k(n)}}{a_n} \leq A$$

eşitsizliklerini sağlayan tek bir $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun bulunduğunu ve k'nin azalmayan ve örten bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

(b) Yukarıdaki k fonksiyonu her değeri en fazla m kez alıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $C^n \leq Aa_n$ olacak şekilde bir $C > 1$ gerçel sayısının var olduğunu gösteriniz.

İkinci Gün, 9 Aralık 1995

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat

4. Bir ABC ($|AB| \neq |AC|$) üçgeninin A açısının iç ve dış açıortayları BC doğrusunun sırayla D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ çaplı (ve üçgenin düzleminde bulunan) çemberin herhangi bir F noktasından BC, CA, AB doğrularına indirilen dikmelerin ayakları sırayla K, L, M ise, $[KL] = [KM]$ olduğunu ispatlayınız.

5. A, boş olmayan sonlu bir tamsayı kümesi ise, A'ya ait elemanların toplamını $t(A)$ ile gösterelim ve $t(\phi) = 0$ olarak tanımlayalım. Pozitif tamsayılardan oluşan öyle bir X kümesi bulunuz ki, her k tamsayısı için, A_k ve B_k, X'in sonlu altkümeleri olmak üzere, $A_k \cap B_k = \phi$ ve $t(A_k) - t(B_k) = k$ koşullarını sağlayan tek bir (A_k, B_k) sıralı ikilisi bulunsun.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi