eşitliğini gerçeklediği görülür. O halde kolaylıkla

$$
\begin{aligned}
x_1+x_4 &= \frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2-4(y_1+y_2)}\right),\\
x_2+x_3 &= \frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{a^2-4(y_1+y_2)}\right),
\end{aligned}
$$

ve benzeri biçimde

$$
\begin{aligned}
x_1+x_3 &= -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-(y_1+y_3)},\\
x_2+x_4 &= -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-(y_1+y_3)},\\
x_1+x_2 &= -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-(y_2+y_3)},\\
x_3+x_4 &= -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-(y_2+y_3)}
\end{aligned}
$$

bulunur. Oysa $y_1+y_2+y_3=b$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &= -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_1},\\
x_1+x_3 &= -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_2},\\
x_1+x_4 &= -\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_3},\\
x_3+x_4 &= -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_1},\\
x_2+x_4 &= -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_2},\\
x_2+x_3 &= -\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_3}
\end{aligned}
$$

elde edilir. İlk iki bağıntıyla son bağıntı kullanılarak, $2x_1$ ve $2x_2$ için sırayla aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$
-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_1}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_3},
$$

$$
-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_1}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_3}.
$$

Benzer biçimde $2x_3$ ve $2x_4$ sırasıyla

$$
-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_1}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_3},
$$

$$
-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_1}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_3}
$$

olarak belirlenir. Bu köklü değerlerin bazılarının hesaplanmasında gerekeceği için, son olarak bir karmaşık sayının kare kökünün nasıl belirlendiğini anımsatarak yazıyı bitirelim:

$$
\sqrt{\alpha+i\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right.
\left.+\,i\,\mathrm{sgn}(\beta)\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right).
$$

$\mathrm{sgn}(\beta)$, $\beta>0$ iken $+1$, $\beta<0$ iken -1 ve $\beta=0$ iken 0 değerini alan fonksiyondur.

KAYNAKÇA

[1] N. Çalışkan, *Cebirsel Denklemlerin Kökleri*, *Matematik Dünyası*, **4**, sayı 3, 9–13 (1994).

PRATİK VE İLGİNÇ ARİTMETİK İŞLEMLER

Hüseyin Kayadibi *

Teknoloji dünyasında bütün bilimlerin temeli matematiksel sisteme dayanır. Bu sistemi zihinsel pratiklerle güçlendirmek hem yorumlama ve çözümleme yeteneğimizi kuvvetlendirir, hem de zevkli bir uğraş haline getirir.

Matematik ile uğraşanlar sayılar dizgesini bir gizem içerisinde oluştururlar. Bu gizemden bazı örnekler verebiliriz.

1. Birler basamaklarındaki rakamların toplamı 10, diğer rakamları aynı olan eşit basamaklı iki sayının çarpımı. Sayılar A ve

* Gülhane Askeri Tıp Akademisi öğrencisi

E, bunların birler basamaklarındaki rakamlar H ve N, ve bu sayıların birler basamaklarındaki rakamlar atılınca kalan sayı K olsun. A ve E sayılarının çarpımının son iki rakamı H ve N rakamlarının çarpımıdır. Eğer bu çarpım tek basamaklı ise A ve E sayılarının çarpımının onlar basamağındaki rakamı 0, birler basamağındaki rakamı ise H ve N rakamlarının çarpımıdır. A ve E sayılarının çarpımının diğer rakamları ise $K(K+1)$'dir. Son rakamı beş olan sayıların karesi de bu yolla hesaplanabilir. Örnekler:

$$78 \cdot 72 = 5616,$$

çünkü $56 = 7(7+1)$ ve $16 = 8 \cdot 2$.

$$473 \cdot 477 = 225621,$$

çünkü $2256 = 47(47+1)$ ve $21 = 3 \cdot 7$.

$$8842 \cdot 8848 = 78234016,$$

çünkü $782340 = 884(884+1)$ ve $16 = 2 \cdot 8$.

2. Birler basamaklarındaki rakamları aynı, diğer her bir basamaktaki rakamları toplamı 10 olan eşit basamaklı iki sayının çarpımı. Sayılar H ve K, ortak birler basamakları E, sayılardan birler basamaklarındaki rakam atıldığında kalan sayılar N ve A, ve N ve A sayılarının basamak miktarı kadar E rakamının yan yana yazılmasıyla oluşan sayı Y olsun. H ve K sayılarının çarpımının son iki rakamı E^2'dir. Eğer E^2 tek basamaklı ise, H ve K sayılarının çarpımının onlar basamağındaki rakamı 0 ve birler basamağındaki rakamı E^2'dir. H ve K sayılarının çarpımının diğer rakamları ise N ve A sayılarının çarpımının Y sayısı ile toplamıdır. Örnekler:

$$78 \cdot 38 = 2964,$$

çünkü $29 = 7 \cdot 3 + 8$ ve $64 = 8^2$.

$$162 \cdot 942 = 152604,$$

çünkü $1526 = 16 \cdot 94 + 22$ ve $04 = 2^2$.

$$2473 \cdot 8633 = 213494009,$$

çünkü $213494 = 247 \cdot 863 + 333$ ve $09 = 3^2$.

3. Bütün rakamları 3, 6 ve 9 olan sayıların karesi. H, bütün rakamları 3 olan karesi bulunacak sayı olsun. 3^2 olan 9 rakamı 09 olarak değerlendirilir. H'nin basamak miktarının bir eksiği kadar 1 rakamı $3^2 = 09$'daki 0'ın soluna, aynı miktardaki 8 rakamı ise 0 ile 9'un arasına yazılır. Örnekler:

$$3^2 = 9,$$
$$33^2 = 1089,$$
$$333^2 = 110889,$$
$$3333^2 = 11108889.$$

K, bütün rakamları 6 olan karesi bulunacak sayı olsun. K'nin basamak miktarının bir eksiği kadar 4 rakamı $6^2 = 36$'daki 3'ün soluna, aynı miktardaki 5 rakamı ise 3 ile 6'nın arasına yazılır. Örnekler:

$$6^2 = 36,$$
$$66^2 = 4356,$$
$$666^2 = 443556,$$
$$6666^2 = 44435556.$$

E, bütün rakamları 9 olan karesi bulunacak sayı olsun. E'nin basamak miktarının bir eksiği kadar 9 rakamı $9^2 = 81$'deki 8'in soluna, aynı miktardaki 0 rakamı ise 9 ile 1'in arasına yazılır. Örnekler:

$$9^2 = 81,$$
$$99^2 = 9801,$$
$$999^2 = 998001,$$
$$9999^2 = 99980001.$$

H, K ve E'nin karelerindeki rakamların toplamı 9'un katıdır.

4. Bütün rakamları 9 olan herhangi iki sayının çarpımı. Çarpi lacak sayılardan büyük olanı M, küçük olanı T, M'nin basamak miktarı K ve T'nin basamak miktarı H olsun. M ve T sayılarının çarpımında

(a) birler basamağı daima 1'dir ve sonuçta sadece bir tane 1 rakamı vardır;

(b) H'nin bir eksiği kadar 0 rakamı vardır ve bunlar 1 rakamının solundadır;

(c) $K - H$ kadar 9 rakamı 0'ların solundadır;

(ç) (c)'de bahsedilen 9'ların solunda bir tane 8 rakamı vardır; bu 8 rakamı 0'ın hemen solunda ise çarpılan iki sayı aynı sayılardır; başka da 8 yoktur;

(d) $H - 1$ tane 9 rakamı bütün sayıların solundadır;

(e) 1 rakamının solundaki 0'larla, 8 rakamının solundaki 9'ların miktarı eşittir.

Örnekler:

$$
\begin{aligned}
9\cdot 9 &= 81,\\
999\cdot 9 &= 8991,\\
99\cdot 99 &= 9801,\\
999\cdot 99 &= 98901,\\
9999\cdot 999 &= 9989001,\\
999999\cdot 999 &= 998999001.
\end{aligned}
$$

5. Herhangi bir sayının 11 veya 9 ile bölümündeki devredenin bulunması. B'nin 11 ile bölümündeki devreden sayı, B'nin (mod 11)'deki denginin 9 katıdır. Örnekler:

$$\frac{1687}{11} = 153.\overline{36} \quad \text{ve} \quad \frac{178}{11} = 16.\overline{18},$$

çünkü $1687 \equiv 4 \pmod{11}$ ve $4\cdot 9 = 36$, ve $178 \equiv 2 \pmod{11}$ ve $2\cdot 9 = 18$.

C'nin 9 ile bölümündeki devreden sayı, C'nin (mod 9)'daki denginin 11 katıdır. Örnekler:

$$\frac{3508}{9} = 389.\overline{77} \quad \text{ve} \quad \frac{473}{9} = 52.\overline{55},$$

çünkü $3508 \equiv 7 \pmod 9$ ve $7\cdot 11 = 77$, ve $473 \equiv 5 \pmod 9$ ve $5\cdot 11 = 55$.

6. $n = 3k$ **şeklindeki herhangi bir sayının rakamlarının küpleri toplanır, sonra çıkan sayının da rakamlarının küpleri toplanır. Bu işlem birkaç defa yapılınca 153 sayısı çıkar.** Örnekler: Sayımız 729 ise, üç adımda

$$
\begin{aligned}
7^3+2^1+9^3 &= 1080,\\
1^3+0^3+8^3+0^3 &= 513,\\
5^3+1^3+3^3 &= 153
\end{aligned}
$$

buluruz. Halbuki 162 için dokuz adım gerekir:

$$
\begin{aligned}
1^3+6^3+2^3 &= 225,\\
2^3+2^3+5^3 &= 141,\\
1^3+4^3+1^3 &= 66,\\
6^3+6^3 &= 432\\
4^3+3^3+2^3 &= 99,\\
9^3+9^3 &= 1458,\\
1^3+4^3+5^3+8^3 &= 702,\\
7^3+0^3+2^0 &= 351\\
3^3+5^3+1^3 &= 153.
\end{aligned}
$$

7. $n = 3k-1$ **şeklindeki herhangi bir sayının rakamlarının küpleri toplanır, sonra çıkan sayının da rakamlarının küpleri toplanır. Bu işlem birkaç defa yapılınca 407 veya 371 sayısı bulunur.** Örnekler: 425 için,

$$
\begin{aligned}
4^3+2^3+5^3 &= 197,\\
1^3+9^3+7^3 &= 1073,\\
1^3+0^3+7^3+3^3 &= 371;
\end{aligned}
$$

890 için ise

$$
\begin{aligned}
8^3+9^3+0 &= 1241,\\
1^3+2^3+4^3+1^3 &= 74,\\
7^3+4^3 &= 407
\end{aligned}
$$

buluruz.

Şimdi sizlere vereceğim işlemlerle, önceden öğrenmiş olduğunuz yöntemlerin ve benim önerdiğim yöntemlerin bir karşılaştırmasını yapınız:

1. $8311\cdot 8319 =?$ $\quad 941\cdot 949 =?$
2. $8842\cdot 2262 =?$ $\quad 178\cdot 938 =?$
3. $33333^2 =?$ $\quad 66666^2 =?$ $\quad 99999^2 =?$
4. $9999\cdot 9999 =?$ $\quad 99999\cdot 9999 =?$
5. 2410, 11'e bölündüğünde devreden sayı nedir? 8450, 9'a bölündüğünde devreden sayı nedir?
6. 843'ün rakamlarının küplerini toplayın, sonra çıkan sayının rakamlarının küplerini toplayın ve böyle devam edin. Ne buldunuz?
7. 473'ün rakamlarının küplerini toplayın, sonra çıkan sayının rakamlarının küplerini toplayın ve böyle devam edin. Ne buldunuz?
8. 8669'un rakamlarının küplerini toplayın, sonra çıkan sayının rakamlarının küplerini toplayın ve böyle devam edin. Ne buldunuz?