POLİNOM KÖKLERİ İÇİN BİR ALGORİTMA

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun *

Polinom köklerinin hesaplanması matematiğin en eski ve en çok uğraşılan sorunlarından biri olmuştur. Bu konudaki kısa bir tarihçe ve köklerin belirlenmesine ilişkin çözüm yöntemleri için [**1**]'e başvurulabilir. Biz bu yazıda az da olsa farklı bir yaklaşım önereceğiz. Polinomlara ilişkin bilgilerin gelişim tarihçesindeki en önemli iki sonuç, hiç kuşkusuz Gauss ve Abel tarafından sırasıyla 1792 ve 1826 yıllarında kanıtlanan şu şaşırtıcı sonuçlar olmuştur:

1. Derecesi n olan gerçel katsayılı bir polinomun, bazıları karmaşık sayı olabilen tam n tane kökü vardır.
2. Derecesi dörtten büyük olan gerçel katsayılı tüm polinomlar için, köklerin cebirsel yöntemler ve kök almalar yoluyla hesaplanmasına ilişkin bir algoritma yoktur.

Biz bu yazıda üçüncü ve dördüncü dereceden gerçel katsayılı polinomların kökleri için bir algoritma önereceğiz. Okuyucunun karmaşık sayılarla işlem yapabilmesi yazıyı kavramak için yeterlidir. Tüm polinomlar için genelliği bozmaksızın başat katsayı 1 olarak alınacaktır.

I. Üçüncü Dereceden Denklemler

Öncelikle şunu gösterelim:

$$p(x) = x^3 + px + q \tag{1}$$

biçimindeki özel üçüncü derece polinomlarının köklerini bulmak neredeyse anahtar niteliğindedir. Burada $q \neq 0$ varsayabiliriz, çünkü $q = 0$ ise köklerin 0, $i\sqrt{p}$ ve $-i\sqrt{p}$ olduğu hemen görülür. Şimdi,

$$a^3 + b^3 + q = 0 \quad \text{ve} \quad 3ab + p = 0 \tag{2}$$

eşitliklerini gerçekleyen a ve b gerçel ya da karmaşık sayılarını eğer bulabilirsek, (1)'in aranan tüm çözümlerinin

$$x_0 = a + b, \quad x_1 = wa + w^2b, \quad x_2 = w^2a + wb$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Burada

$$w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

karmaşık sayısının $w^2 + w + 1 = 0$ ve $w^3 = 1$ eşitliklerini gerçeklediği kolayca gözlenebilir. Gerçekten (2) gerçekleniyorsa

$$(a+b)^3 + p(a+b) + q = a^3 + b^3 + q + (3ab+p)(a+b)$$

nedeniyle x_0'ın bir kök olduğu hemen görülür. Oysa wa ve w^2b sayıları da (2) koşullarını gerçekler ve sonuçta x_1 sayısı da bir kök olur, çünkü

$$(wa)^3 + (w^2b)^3 + q = a^3 + b^3 + q,$$
$$3(wa)(w^2b) + p = 3ab + p$$

olmaktadır. Benzer biçimde x_2 son köktür. (2) nedeniyle

$$a^3 + b^3 = -q \quad \text{ve} \quad 27a^3b^3 = -p^3$$

olduğundan, sonuçta

$$\delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

belirteci yardımıyla

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\delta}} \quad \text{ve} \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\delta}}$$

bulunur. Eğer $\delta > 0$ ise, a ve b sayıları ile $x_0 = a + b$ kökünün gerçel, buna karşılık

$$x_1 = -\frac{x_0}{2} + i\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2},$$
$$x_2 = -\frac{x_0}{2} + i\frac{(b-a)\sqrt{3}}{2}$$

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

köklerinin ise eşlenik karmaşık sayılar olduğu görülmektedir. Eğer $\delta < 0$ ise, tüm kökler gerçel sayıdır. Gerçekten

$$a^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{|\delta|}$$

karmaşık sayısı için

$$|a^3|^2 = \frac{q^2}{4} + |\delta| = -\frac{p^3}{27} = \frac{|p|^3}{27},$$
$$\arg a^3 = -\arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)$$

olduğundan,

$$\theta = \arg a = -\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right),$$
$$a = \sqrt{\frac{|p|}{3}}e^{i\theta} = \bar{b},$$

ve $b = \bar{a}$, $w^2 = \bar{w}$ gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)\right], \\ x_1 &= aw + \overline{aw} \\ &= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\left(2\pi - \arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)\right)\right], \\ x_2 &= bw + \overline{bw} \\ &= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left[\frac{1}{3}\left(4\pi - \arctan\left(\frac{2\sqrt{|\delta|}}{q}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\delta = 0$ ise, kökler

$$x_0 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad \text{ve} \quad x_1 = x_2 = -a = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

olur. Dikkat edilirse çok yalın $p(x) = x^3 + x + 1$ polinomunun kökleri bile aşağıdaki çetrefilli sayılardır; burada $\delta = \frac{31}{108}$ olup,

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} < 0, \\ x_1 &= -\frac{x_0}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{31} + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}\right), \\ x_2 &= \overline{x_1} \end{aligned}$$

köklerdir. $p(x) = x^3 - 2x + 1$ polinomunun ise belirteci $\delta = -\frac{5}{108}$, kökleri ise $k = 0, 1, 2$ için

$$x_k = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left[\frac{1}{3}\left(2k\pi - \arctan\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)\right]$$

gerçel sayılarıdır.

Artık üçüncü dereceden genel bir $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomunun tüm köklerinin,

$$q(x) = x^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)x + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$$

polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3 olmak üzere,

$$x_1 - \frac{a}{3}, \qquad x_2 - \frac{a}{3}, \qquad x_3 - \frac{a}{3}$$

sayıları olduğunu gözlemek güç değildir, çünkü dikkat edilirse $q(x) = p(x - \frac{a}{3})$ özdeşliği geçerlidir.

II. Dördüncü Dereceden Denklemler

Şimdi de

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dördüncü derece polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3 ve x_4 için bir algoritma belirlemeğe çalışalım. Bu polinomun kökleriyle katsayıları arasındaki ünlü

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + {} & \\ x_4x_1 + x_2x_4 + x_1x_3 &= b(3) \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 &= -c \\ x_1x_2x_3x_4 &= d \end{aligned}$$

bağıntılarından yararlanılırsa $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$, $y_2 = x_1x_3 + x_2x_4$, $y_3 = x_1x_4 + x_2x_3$ sayılarının,

$$q(x) = x^3 - bx^2 + (ac - 4d)x + 4bd - a^2d - c^2$$

üçüncü derece polinomuna ait kök-katsayı bağıntılarını gerçeklediği, söz gelimi $y_1 + y_2 + y_3 = -(-b)$ olduğu görülecektir. Bu gerçeklemeleri okuyucuya bırakıyoruz. O halde y_1, y_2, y_3 sayıları $q(x)$ polinomunun kökleridir, ve bu sayılar I'de anlatılan algoritma yardımıyla belirlenebilir. Şimdi bu belirlenmiş, yani bilinen sayılar yardımıyla, $p(x)$ polinomunun köklerini bulalım. (3)'ün ilk bağıntısı yardımıyla

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = -(x_1 + x_4)(a + x_1 + x_4)$$

olur ve $y_1 + y_2$ sayısının

$$(x_1 + x_4)^2 + a(x_1 + x_4) + y_1 + y_2 = 0$$