EMRE ALKAN'IN EŞİTSİZLİĞİ ÜZERİNE

Albert Erkip *

Emre Alkan, [1]'de aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu iddia etmişti.

İddia. *x, y, z ve n pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\frac{1}{(x+y)^n}+\frac{1}{(x+z)^n}+\frac{1}{(y+z)^n} \le \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $x = y = z$ iken vardır.

[1]'de Emre Alkan istenen eşitsizliğin, h_a, h_b, h_c ve $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ sırayla bir ABC üçgeninin yükseklikleri ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları olmak üzere, $h_a^n + h_b^n + h_c^n \le \Gamma_a^n + \Gamma_b^n + \Gamma_c^n$ eşitsizliğine denk olduğunu göstererek, iddiasını $n = 1$ ve $n = 2$ durumları için kanıtlamıştı.

Fonksiyonların dışbükeylik özellikleri kullanılarak iddiadaki ve benzeri eşitsizlikler kolayca kanıtlanabilir. Aşağıdaki teoremin dışbükeylikle ilgisi fonksiyonun grafiğinin üzerinde kalan bölgeye bakılınca görülecektir.

Teorem. *Bir I açık aralığında f iki kere türevlenebilir ve her $t \in I$ için $f''(t) > 0$ olsun. Her $a, b \in I$ için*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $a = b$ iken vardır.

Kanıt. $g(t) = \frac{1}{2}(f(a)+f(t)) - f\left(\frac{a+t}{2}\right)$ fonksiyonuna bakalım. $t \in I$ için

$$g'(t) = \frac{1}{2}\left[f'(t) - f'\left(\frac{a+t}{2}\right)\right] = \frac{t-a}{4}f''(c) \quad (2)$$

olacaktır. İkinci eşitlikte Ortalama Değer Teoremi kullandık ve bu eşitlik t ile $\frac{a+t}{2}$ arasındaki uygun bir c için sağlanır. $f''(c) > 0$ olduğundan (2)'den g fonksiyonunun $t < a$ için azalan, $t > a$ için artan olduğu çıkar; yani g'nin minimum değeri $t = a$ noktasındadır. $b \neq a$ için

$$\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g(b) > g(a) = 0$$

Teorem 1'in kanıtını tamamlar. □

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

İddiadaki eşitsizliğe gelince, $f(t) = 1/t^n$ için

$$f''(t) = \frac{n(n+1)}{t^{n+2}} > 0$$

eşitsizliği $I = (0, \infty)$ aralığında geçerlidir. x, y, z pozitif sayıları için Teorem 1'den çıkan

$$\frac{2^n}{(x+y)^n} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}\right)$$

ile $x+z$ ve $y+z$ için benzer eşitsizleri toplarsak iddiadaki eşitsizliği elde ederiz. Eşitlik ancak üç eşitlikte de eşitlik durumunda, yani $x = y = z$ iken vardır.

Teorem 1'de a ve b'nin orta noktası $\frac{a+b}{2}$ yerine aralarındaki herhangi bir noktayı düşünebiliriz, bu bize aynı yolla kanıtlanabilen şu teoremi verir.

Teorem 2. *Bir I açık aralığında f iki kere türevlenebilir ve her $t \in I$ için $f''(t) > 0$ olsun. Her $a, b \in I$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $a = b$ iken vardır.

Teorem 2'yi kullanarak Emre Alkan'ın eşitsizliğini biraz genelleştirebiliriz: x, y, z, α, β ve n pozitif sayılar olmak üzere

$$\frac{1}{(\alpha x+\beta y)^n}+\frac{1}{(\alpha y+\beta z)^n}+\frac{1}{(\alpha z+\beta x)^n} \le \frac{1}{(\alpha+\beta)^n}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)$$

gerçeklenir. Eşitlik yalnız $x = y = z$ iken vardır.

KAYNAKÇA

[1] E. Alkan, *Bir Eşitsizlik Üzerine*, *Matematik Dünyası*, **5**, sayı 4, 17–18 (1995).