PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Geçen sayımızda **Y115**'in metninde $R = 1$ ifadesi çıkmamıştı. Ayrıca **ÇÖZÜMLER** köşesinde bazı çözenlerin adları yazılmamıştı. Eksik kalan adları şimdi veriyoruz. Okuyucularımızdan özür dileriz.

A106. (*Atasağun Baykal, Hasan Çetinkaya, Namık Gök, Cemal Özboğa, Ruhi Tabur.*)

A107. (*Emre Alkan, Atasagun Baykal, Hasan Çetinkaya, Selçuk Çığ, Cemal Özboğa, Ruhi Tabur, Erol Ünal, Ergün Yaraneri.*)

A108. (*Boğaçhan Çelen, Ruhi Tabur.*)

A110. (*Atasağun Baykal, Boğaçhan Çelen.*)

Y106. (*Emre Akan, Atasağun Baykal, Hasan Çetinkaya, Cemal Özboğa, Ergün Yaraneri.*)

Y107. (*Emre Alkan, Atasağun Baykal, Ergün Yaraneri.*)

Y108. (*Atasağun Baykal, Hasan Çetinkaya, Selçuk Çığ, Namık Gök, Ali Işıtan, Cemal Özboğa.*)

Y109. (*Emre Alkan, Atasağun Baykal, Hasan Çetinkaya.*)

Y110. (*Selçuk Çığ.*)

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A121. $\sqrt[x]{9} = \sqrt[x]{6} + \sqrt[x]{4}$ denkleminin gerçel çözümlerini bulunuz. (*Selma Atabey*)

A122. Her n pozitif tam sayısı için

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n (n!)^2$$

eşitsizliğini kanıtlayınız. (*Turgay Uçkun*)

A123. $0 < r < 1$ şeklindeki bir r rasyonel sayısının ondalık açılımı $r = 0.x_1x_2x_3\cdots$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

limitini hesaplayınız. (*Nurettin Ergun*)

A124. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan iki merkezli bir dörtgenin alanının $S = \sqrt{abcd}$ olduğunu gösteriniz.

(Hem çevrel hem de içteğet çemberi olan bir dörtgene *iki merkezli dörtgen* adı verilir.)

A125. Bir ABC üçgeninin kenarları a, b, c, çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. ABC dar açılı ise, $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y121. $2m - 1 \leq n$ olacak şekildeki n, m pozitif tamsayıları için

$$\binom{2n}{2m-1} = 2\left[\binom{n}{2m-1} + \binom{n}{2m-2}\binom{n}{1} + \binom{n}{2m-3}\binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{m}\binom{n}{m-1}\right]$$

olduğunu gösteriniz. (*Nurettin Ergun*)

Y122. Bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunlukları, r içteğet çemberin yarıçapı, $2s = a + b + c$, $p = ab + bc + ac$ ve S üçgenin alanı olsun. ABC üçgeninin bir dik üçgen olması için gerek ve yeter koşulun

$$r^3 - sr^2 + (p - s^2)r - \frac{S^2}{s} = 0$$

olduğunu gösteriniz. (*Selma Atabey'in bir sorusundan türetildi.*)

Y123. $N \geq 2$ bir tamsayı ve $n = 3N$ ise, düzgün bir n-gende uzunluklarının farkı bir kenarın uzunluğuna eşit olan iki köşegen olduğunu gösteriniz. (*Ferit Öktem*)

Y124. $(x - 1)^n (2x^2 + 1)^n$ çarpımının açılımı $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{3n}x^{3n}$ olsun. $A_0 + A_3 + A_6 + \cdots + A_{3n}$ toplamını hesaplayınız.

Y125.

$$f_p(n)=\frac{1}{(p+1)!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n+1)^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & C_1^{p-1} & C_2^{p-1} & \cdots & C_{p-2}^{p-1} & 0 & (n+1)^{p-1}\\ 1 & C_1^{p} & C_2^{p} & \cdots & C_{p-2}^{p} & C_{p-1}^{p} & (n+1)^{p}\\ 1 & C_1^{p+1} & C_2^{p+1} & \cdots & C_{p-2}^{p+1} & C_{p-1}^{p+1} & (n+1)^{p+1} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanan f_p fonksiyonu için

$$f_p(n)=1+2^p+3^p+\cdots+n^p$$

olduğunu gösteriniz. (*Tamer Adanır*)

ÇÖZÜMLER

A111. 999999999 sayısını hangi sayı ile çarptığımızda, tüm rakamları 1 olan bir sayı elde ederiz?

Çözüm. $999999999=10^9-1$ ve tüm rakamları 1 olan sayılar $(10^n-1)/9$ şeklinde olduğundan, istenen sayı

$$X=\frac{10^n-1}{9(10^9-1)}$$

olmalıdır. X'in tamsayı olması için 10^9-1, 10^n-1'i bölmek zorundadır; $n=9m$ ise bu gerçeklenir.

$$\frac{10^{9m}-1}{10^9-1}=10^{9(m-1)}+10^{9(m-2)}+\cdots+10^9+1$$

sayısı m tane 1 ve sıfırlardan oluşur; o halde $m=9$ için

$$X=\frac{10^{81}-1}{9(10^9-1)}$$

istenen sayıdır.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Burhan Biner, Güler Çavuşoğlu, Boğaçhan Çelen, Hasan Denker, Derya Pamuktulum.*)

A112. $a,b>0$ gerçel sayıları için

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Önce

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}-\sqrt{a}-\sqrt{b}&=\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\\ &=(a-b)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\\ &=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

yazarız. $a-b$ ve $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sayılarının işareti aynı olduğundan son ifade pozitiftir. Bu ise istenen sonuca denktir.

(**Çözenler:** *Ali Emre Acar, Ali Akın, İhsan Aydemir, Murat Aygen, Ali İlker Bağrıaçık, Atasağun Baykal, Burhan Biner, Özgür Çetin, Hasan Denker, Namık Gök, Deniz Gündüz, Murat Kantarcıoğlu, Yalçın Kaymak, Seyhun Kesim, Derya Pamuktulum, Celalettin Rumi Şimşek, Banu Talay, Ergün Yaraneri.*)

A113. Bir $ABCD$ dörtgeninde $|AB|=|AD|$, $\widehat{CAB}=3\widehat{CAD}$, $\widehat{ABC}=2\widehat{ACB}$ ve $|BC|>|AD|$ ise, $\widehat{ACD}$'yi bulunuz. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. $\widehat{CAD}=x$ ve $\widehat{ACB}=y$ olsun. ABC üçgeninde iç açılar toplamından $x+y=60°$ bulunur. $\widehat{CAE}=y$ olacak şekilde AE'yi çizelim. $|CE|=|AE|$ ve $\widehat{AEB}=2y$ olur, çünkü $\widehat{CAE}=\widehat{ACB}=y$ ve $\widehat{AEB}$, AEC üçgeninin dış açısıdır. $\widehat{AEB}=2y$ olduğundan $|AE|=|AB|$ veya $|AE|=|AD|$ çıkar. Ayrıca $\widehat{DAE}=x+y=60°$'dir. Dolayısıyla ADE eşkenar üçgendir ve $|AD|=|DE|=|AE|$ olur. Kenar eşitliklerine dikkat edilirse DEC üçgeninin ikizkenar olduğu görülür. DEC üçgeninde $\widehat{DEB}=\widehat{DCE}+\widehat{CDE}$ eşitliğinden taban açıları $30+y$ bulunur. $\widehat{DCE}=\widehat{ACD}+\widehat{ACB}$ ve $30+y=\widehat{ACD}+y$ ise, $\widehat{ACD}=30°$ bulunur.

(**Çözenler:** *Ali Akın, İhsan Aydemir, Murat Aygen, Ali İlker Bağrıaçık, Atasağun Baykal, Özgür Çetin, Erol Gedikli, Yalçın Kaymak, Seyhun Kesim, Derya Pamuktulum.*)

A114. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{99+70\sqrt{2}}}$ sayısını $\sqrt{a}+b$ şeklinde ifade ediniz. (*Cuma Arslan*)

Çözüm. $$\frac{1}{\sqrt[6]{99+70\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{3^3+3\cdot 3^2\cdot 2\sqrt{2}+3\cdot 3(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{(3+2\sqrt{2})^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-(1)^2} = \sqrt{2}-1.$$

(**Çözenler:** *Ali Akın, İhsan Aydemir, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Burhan Biner, Özgür Çetin, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Deniz Gündüz, Ali Işıtan, Yalçın Kaymak, Seyhun Kesim, Derya Pamuktulum, Ruhi Tabur, Banu Talay, Naim Uygun, Ergün Yarameri.*)

A115. $n > 2$ bir doğal sayı ise,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1\cdot 2} = 1-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Ali İlker Bağrıaçık, Atasağun Baykal, Burhan Biner, Boğaçhan Çelen, Özgür Çetin, Hasan Denker, Erol Gedikli, Deniz Gündüz, Ali Işıtan, Murat Kantarcıoğlu, Yalçın Kaymak, Seyhun Kesim, Derya Pamuktulum, Banu Talay, Ergün Yaraneri.*)

Y111. ABC üçgeninde $\hat{A} = 45°$ ve $\hat{B} = 75°$'dir. $[AB]$ kenarı üzerinde $\widehat{ACP} = 15°$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $|PB| = 2|AP|$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Sinüs teoriminden çıkan

$$\frac{AP}{\sin 15°} = \frac{CP}{\sin 45°} \quad \text{ve} \quad \frac{PB}{\sin 45°} = \frac{CP}{\sin 75°}$$

bağıntılarından

$$\frac{PB}{AP} = \frac{\sin 45°}{\sin 75°}\frac{\sin 45°}{\sin 15°} = \frac{1}{2\cos 15° \sin 15°} = \frac{1}{\sin 30°} = 2$$

elde edilir.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Alaattin Aktaş, Emre Alkan, İhsan Aydemir, Murat Aygen, Ali İlker Bağrıaçık, Atasağun Baykal, Burhan Biner, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Deniz Gündüz, Ali Işıtan, Murat Kantarcıoğlu, Yalçın Kaymak, Seyhun Kesim, Cemal Özboğa, Orçun Özelkök, Kubilay Öztürk, Derya Pamuktulum, Celalettin Rumi Şimşek, Ruhi Tabur, Banu Talay, Yücel Türker, Naim Uygun, Erol Ünal, Ergün Yaraneri.*)

Y112. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = (x+1)^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+5)^2$ denkleminin gerçel köklerini bulunuz.

Çözüm. $x+3 = y$ der ve denklemde yerine koyarsak

$$(y-2)(y-1)(y+1)(y+2) = (y-2)^2+(y-1)^2 + (y+1)^2+(y+2)^2$$

$$(y^2-4)(y^2-1) = 4y^2+10$$

$$y^4-9y^2+6 = 0$$

elde ederiz. Bu denklemin

$$y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{9\pm\sqrt{105}}{2}}$$

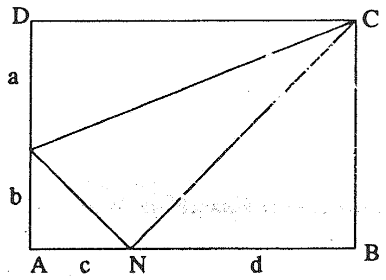
çözümlerinden, ilk denklemin reel köklerini

$$x_{1,2} = -3\pm\sqrt{\frac{9+\sqrt{105}}{2}}$$

olarak ayıklarız.

(**Çözenler:** *Ali Emre Acar, Murat Aygen, Ali İlker Bağrıaçık, Atasağun Baykal, Boağçhan Çelen, Özgür Çetin, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Deniz Gündüz, Yalçın Kaymak, Seyhun Kesim, Derya Pamuktulum, Ruhi Tabur, Ergün Yaraneri.*)

Y113. a, b, c, d pozitif gerçel sayıları veriliyor. Kenar uzunlukları $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$, $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ olan bir üçgenin alanının, a, b, c ve d cinsinden rasyonel ifadesi bulunduğunu gösteriniz.



Çözüm. Kenarları $a+b$ ve $c+d$ olan dikdörtgeni çizelim. Pisagor bağıntılarından verilen üçgen MNC üçgenidir. İstenen alan

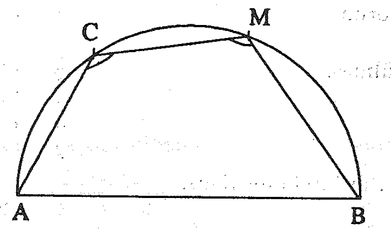
$$(a+b)(c+d)-\frac{bc}{2}-\frac{a(c+d)}{2}-\frac{d(a+b)}{2} = \frac{ac+bc+bd}{2}$$

olur.

(**Çözenler:** *Ali Emre Acar, Ali Akın, Emre Alkan, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Özgür Çetin, Hasan Denker, Erol Gedikli, Yalçın Kaymak, Seyhun Kesim, Cemal Özboğa, Derya Pamuktulum, Ergün Yaraneri.*)

Y114. O merkezli ve r yarıçaplı çemberin üzerinde ve içinde kesişmeyecek şekilde $[AB]$ çapı ve $[CM]$ kirişi çiziliyor. $\widehat{ACM}+\widehat{BMC}$'yi hesaplayınız.

Çözüm. COM açısının değerine α diyelim. C ve M noktalarının konumlarına göre Şekil 1 ve 2'de gösterilen iki ayrı durum vardır.



Şekil 1

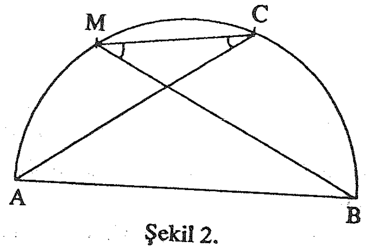
Birinci durumda

$$\widehat{ACM}+\widehat{BMC} = 360^\circ-\widehat{CAB}-\widehat{MBA} = -\frac{\widehat{CM}+\widehat{MB}}{2}-\frac{\widehat{AC}+\widehat{CM}}{2}+360^\circ$$

olur. $\widehat{AC}+\widehat{CM}+\widehat{MB}=180^\circ$ olduğundan

$$\widehat{ACM}+\widehat{BMC}=360^\circ-\frac{180^\circ+\widehat{CM}}{2}=270^\circ-\frac{\alpha}{2}$$

buluruz. $0<\alpha<180^\circ$ olduğundan, $\widehat{ACM}+\widehat{BMC}$, 180° ile 270° arasındaki tüm değerleri alabilir.



Şekil 2.

İkinci durumda

$$\widehat{ACM}+\widehat{BMC}=\frac{\widehat{AM}}{2}+\frac{\widehat{CB}}{2} = \frac{180^\circ-\widehat{CM}}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$$

olur. Yani $\widehat{ACM}+\widehat{BMC}$, 0° ile 90° arasındaki tüm değerleri alabilir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Atasağun Baykal, Hasan Denker, Cemal Özboğa, Ergün Yaraneri.*)

Y115. ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı $R=1$, içteğet çember yarıçapı r ve ortik üçgeninin içyarıçapı p ise,

$$p\le 1-\frac{(1+r)^2}{3}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Turgay Uçkan*)

(Bir üçgenin *ortik üçgeni*, köşeleri kenarlar üzerindeki yükseklik ayakları olan üçgendir.)

Çözüm. Euler teoreminden $R\ge 2r$ olduğundan, r/R oranı en fazla $1/2$ olabilir. Ortik üçgenin çevrel çemberi ABC'nin dokuz nokta çemberidir. Yani kenarların ortalarından da geçtiği için benzerlik oranı $1/2$ olur ve yarıçapı $R/2$'dir. Yine ilk eşitsizlikten $2p\le R/2$ elde ederiz; yani p/R oranı en fazla $1/4$ olabilir.

$$\left(1+\frac{r}{R}\right)^2\le\frac{9}{4}$$

olduğundan,

$$\frac{p}{R}\le\frac{1}{4}=1-\frac{3}{4}\le 1-\frac{(1+\frac{r}{R})^2}{3}$$

bulunur. $R=1$ için aradığımız eşitsizlik çıkar.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Burhan Biner, Hasan Denker.*)