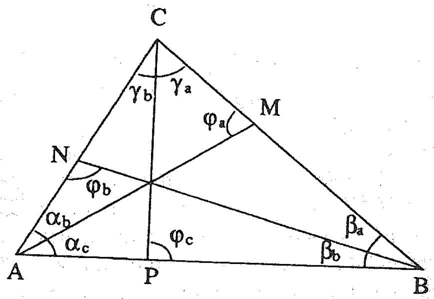
KOTANJANT TEOREMİ VE UYGULAMALARI

Selma Atabey *



Bu makalede, kotanjant teoremi yardımı ile bir üçgenin kenar uzunlukları, açılarının trigonometrik fonksiyonları ve kenarortaylarının arasındaki bağıntılar verilmiştir.

ABC bir üçgen olsun. $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, ve $\widehat{BCA} = \gamma$ olsun. S ile ABC üçgeninin alanı gösterilsin.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ eşitliği konsinüs teoremi olarak bilinmektedir. Bu eşitlik, $2S = bc\sin\alpha$ formülü yardımı ile *kotanjant teoremi* denilen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot\alpha$$

formülüne dönüşür.

Kotanjant teoreminin uygulamalarına geçmeden önce bazı işaretleri tanımlayalım. ABC üçgeninin nin BC, CA ve AB kenarlarının orta noktaları sıra ile M, N ve P olsun. $\widehat{MAB} = \alpha_c$, $\widehat{MAC} = \alpha_b$, $\widehat{NBA} = \beta_c$, $\widehat{BNA} = \varphi_b$ ve $\widehat{CPB} = \varphi_c$ olsun. $n \geq 1$ için

$$K_n = \frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{(4S)^n}$$

olsun.

Soru 1. *ABC herhangi bir üçgen olsun. Aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:*

$$\cot\varphi_a = \frac{c^2 - b^2}{4S},$$

$$\cot\varphi_b = \frac{a^2 - c^2}{4S}, \qquad \cot\varphi_c = \frac{b^2 - a^2}{4S}.$$

Çözüm. AMC üçgenine kotanjant teoremini uygularsak,

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + |AM|^2 - 4\frac{S}{2}\cot\varphi_a$$

olur ve $|AM|^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ eşitliğinden istenen ilk eşitlik bulunur. Benzer şekilde diğer ikisi de gösterilir.

Sonuç 1. *İkizkenar olmayan her üçgen aşağıdaki eşitliği sağlar:*

$$\frac{c^2 - b^2}{\cot\varphi_a} = \frac{a^2 - c^2}{\cot\varphi_b} = \frac{b^2 - a^2}{\cot\varphi_c} = 4S.$$

Gerçekte bunlar Soru 1'in eşitlikleridir. Değişik şekilde (sinüs teoremine benzer şekilde) yazılmışlardır.

Sonuç 2. *Her üçgen için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:*

$$\cot\varphi_a + \cot\varphi_b + \cot\varphi_c = 0,$$

$$\cot\varphi_a = \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\gamma),$$

$$\cot\varphi_b = \frac{1}{2}(\cot\gamma - \cot\alpha),$$

$$\cot\varphi_c = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta).$$

Kanıt. İlk eşitlik doğrudan Soru 1'den çıkar. Diğerleri de Soru 1'den ve kotanjant teoreminden çıkartılabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned}\cot\varphi_a &= \frac{c^2 - b^2}{4S} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} - \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4S}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\cot\beta - \cot\gamma)\end{aligned}$$

olur.

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi matematik öğretmeni

Soru 2. *Her üçgen aşağıdaki eşitliği sağlar:*

$$\cot^2\varphi_a + \cot^2\varphi_b + \cot^2\varphi_c = K_2 - 1.$$

Çözüm. Soru 1'i ve Heron formulünü kullanarak eşitliğin sol tarafını hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
&\cot^2\varphi_a + \cot^2\varphi_b + \cot^2\varphi_c \\
&= \left(\frac{c^2-b^2}{4S}\right)^2 + \left(\frac{a^2-c^2}{4S}\right)^2 + \left(\frac{b^2-a^2}{4S}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16S^2}[2(a^4+b^4+c^4) - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)] \\
&= \frac{1}{16S^2}\Big(a^4+b^4+c^4 - \\
&\quad - [2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)]\Big) \\
&= \frac{1}{16S^2}(a^4+b^4+c^4-16S^2) = K_2 - 1
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 3. *Her üçgen için aşağıdakiler geçerlidir:*

$$a^4+b^4+c^4 \geq 16S^2,$$

$$\cot\varphi_a\cot\varphi_b + \cot\varphi_b\cot\varphi_c + \cot\varphi_c\cot\varphi_a = -\frac{1}{2}(K_2-1) \leq 0,$$

$$\frac{1}{\sin^2\varphi_a} + \frac{1}{\sin^2\varphi_b} + \frac{1}{\sin^2\varphi_c} = K_2 + 2 \geq 3,$$

$$\frac{\cos 2\varphi_a}{\sin^2\varphi_a} + \frac{\cos 2\varphi_b}{\sin^2\varphi_b} + \frac{\cos 2\varphi_c}{\sin^2\varphi_c} = K_2 - 4 \geq -3.$$

Kanıt. Tüm eşitsizlikler Soru 2'deki eşitliğin birer sonucudur. Bu eşitliğin sol tarafı negatif değildir, dolayısıyla $K_2 \geq 1$'dir.

$$\begin{aligned}
&\cot\varphi_a\cot\varphi_b + \cot\varphi_b\cot\varphi_c + \cot\varphi_c\cot\varphi_a \\
&= \frac{1}{2}[(\cot\varphi_a + \cot\varphi_b + \cot\varphi_c)^2 \\
&\quad - (\cot^2\varphi_a + \cot^2\varphi_b + \cot^2\varphi_c)]
\end{aligned}$$

eşitliğini, Sonuç 2'nin birinci eşitliğini ve Soru 2'yi kullanırsak ikinci iddia bulunur. Üçüncü ve dördüncü iddiaların ispatı ise Soru 2'deki eşitliğin sol tarafında bulunan terimlere sırayla 1 sayısı eklenip ve çıkarılarak elde edilir.

Soru 3. *Her üçgen aşağıdaki eşitliği sağlar:*

$$\cot^3\varphi_a + \cot^3\varphi_b + \cot^3\varphi_c = 3\cot\varphi_a\cot\varphi_b\cot\varphi_c.$$

Çözüm. Sonuç 2'nin birinci şıkkını ve $x+y+z=0$ ise $x^3+y^3+z^3=3xyz$ şartını kullanırız.

Soru 4. *Her üçgen için aşağıdaki formüller geçerlidir:*

$$\cot\alpha_b = \frac{c^2+3b^2-a^2}{4S}, \quad \cot\alpha_c = \frac{b^2+3c^2-a^2}{4S}.$$

Benzer formüller $\cot\beta_a$, $\cot\beta_c$, $\cot\gamma_a$ *ve* $\cot\gamma_b$ *için de vardır.*

Çözüm. ACM ve ABM üçgenlerine kotanjant teoremi uygulanırsa aranan sonuç elde edilir.

Okuyucu aşağıdaki bağıntıları kendisi ispatlayabilir:

$$\begin{cases} \cot\alpha_c - \cot\alpha_b = 2\cot\varphi_a \\ \cot\beta_a - \cot\beta_c = 2\cot\varphi_b \\ \cot\gamma_c - \cot\gamma_a = 2\cot\varphi_c \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \cot\beta_a + \cot\gamma_a = \dfrac{6a^2}{4S} \\ \cot\alpha_b + \cot\gamma_b = \dfrac{6b^2}{4S} \\ \cot\alpha_c + \cot\beta_c = \dfrac{6c^2}{4S} \end{cases} \tag{2}$$

$$\cot\beta_a + \cot\gamma_b + \cot\alpha_c = \cot\gamma_a + \cot\alpha_b + \cot\beta_c = 3K_1 \geq 3\sqrt{3} \tag{3}$$

$$(\cot\alpha_c - \cot\alpha_b)^2 + (\cot\beta_a - \cot\beta_c)^2 + (\cot\gamma_b - \cot\gamma_a)^2 = 4(K_2 - 1) \tag{4}$$

$$(\cot\alpha_c - \cot\alpha_b)^3(\cot\beta_a - \cot\beta_c)^3(\cot\gamma_b - \cot\gamma_a)^3 = 24\cot\varphi_a\cot\varphi_b\cot\varphi_c \tag{5}$$

$$\cot^2\beta_a + \cot^2\gamma_b + \cot^2\alpha_c = \cot^2\gamma_a + \cot^2\alpha_b + \cot^2\beta_c = 10K_2 - 1 \geq 9 \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sin^2\beta_a} + \frac{1}{\sin^2\gamma_b} + \frac{1}{\sin^2\alpha_c} = \frac{1}{\sin^2\gamma_a} + \frac{1}{\sin^2\alpha_b} + \frac{1}{\sin^2\beta_c} = 10K_2 + 2 \geq 12 \tag{7}$$

$$\frac{\cos 2\beta_a}{\sin^2\beta_a} + \frac{\cos 2\gamma_b}{\sin^2\gamma_b} + \frac{\cos 2\alpha_c}{\sin^2\alpha_c} = \frac{\cos 2\gamma_a}{\sin^2\gamma_a} + \frac{\cos 2\alpha_b}{\sin^2\alpha_b} + \frac{\cos 2\beta_c}{\sin^2\beta_c} = 10K_2 - 4 \geq 6 \tag{8}$$

$$\cot\alpha_b\cot\alpha_c + \cot\beta_a\cot\beta_c + \cot\gamma_a\cot\gamma_b = 8K_2 + 1 \geq 9 \tag{9}$$

$$\cot\beta_a + \cot\gamma_a + \cot\alpha_b + \cot\gamma_b + \cot\alpha_c + \cot\beta_c = 6K_1 \geq 6\sqrt{3} \tag{10}$$

$$(\cot\beta_a + \cot\gamma_a)^2 + (\cot\alpha_b + \cot\gamma_a)^2 + (\cot\alpha_c + \cot\beta_c)^2 = 36K_2 \geq 36 \tag{11}$$