TRİGONOMETRİK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ

C. Alparslan Ertuğ *

Dergimizde daha önce yayınlanan yazımızda [5] bir bilinmeyenli trigonometrik denklemlerin çözüm yöntemlerini açıklamaya çalışmıştık. Bu yazımızda ise iki bilinmeyenli trigonometrik denklem sistemlerinin çözülmesine ilişkin yöntemleri ele alacağız. Ancak bu yazıda sözü edilen şeylerin genellikle, daha fazla bilinmeyen içeren denklem sistemleri için de geçerli oldukları unutulmamalıdır.

Bir trigonometrik denklem sistemini çözmek demek, "bilinmeyenlerin, sistemdeki tüm denklemleri *aynı anda* doğru ifadeler haline getiren tüm değerler kümelerini bulmak" demektir.

Trigonometrik denklem sistemlerinin sonsuz sayıda çözümleri bulunur. Bu nedenle çözüm kümelerinin uygun bir notasyonla yazılması son derece önemlidir.

İki bilinmeyenli denklem sistemlerini çözerken, genellikle aşağıdaki yollardan birini izleriz:

1. Bilinmeyenlerden biri öteki cinsinden yazılarak sistem bir bilinmeyenli bir denkleme indirgenir ve buradan da çözüm kümeleri elde edilir.

2. Denklemlerden birinde uygun bir değişken dönüşümü ya da trigonometrik dönüşümler yapılarak sistem cebirsel bir denklem sistemi haline dönüştürülür ve buradan da bilinmeyenlere ait çözüm kümeleri bulunur.

3. Sistemdeki her iki denklemde birden trigonometrik dönüşümler yaparak ya da başka değişkenler kullanarak sistem cebirsel hale getirilir ve buradan da çözümler elde edilir.

Bu yöntemleri örnekler yardımıyla açıklamaya çalışalım.

Bilinmeyenlerden Birini Yoketmek

Örnek 1. *Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:*

$$x - y = \frac{\pi}{3}$$
$$\sin x = 2\sin y$$

Çözüm. Birinci denklemden $x = y + \frac{\pi}{3}$ bulunur Bu ikinci denklemde kullanılır ve ara işlemler yapılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\sin y \\ \sin y \cos\frac{\pi}{3} + \cos y \sin\frac{\pi}{3} &= 2\sin y \\ 3\sin y &= \sqrt{3}\cos y \end{aligned}$$

elde edilir. $\cos y = 0$ olamayacağı denklemlerden açıkça gözükmektedir. O zaman $\cos y$ ile bölünürse

$$\tan y = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sin\pi/6}{\cos\pi/6}$$

çıkar. Bu basit denklem çözülerek

$$y = \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

bulunur. $k = 0, \mp1, \mp2, \ldots$ alınacaktır.

Denklemlerden Birini Dönüştürmek

Söz konusu denklem sistemindeki denklemlerden biri açıların toplam veya farkını, öteki ise, bunların çeşitli trigonometrik oranlarının toplamı, farkı, çarpımı ya da oranını içeriyorsa bu yöntemle sonuca ulaşılabilir. Şimdi bir kaç tipik örnekle yöntemin nasıl uygulandığını gösterelim:

Örnek 2. *Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:*

$$x + y = \frac{4\pi}{3}$$
$$\cos x + \cos y = -\frac{1}{2}$$

* Gemi inşaatı mühendisi

Çözüm. İkinci denklemi, kosinüslerin toplamı formülünden yararlanarak dönüştürelim.

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} &= -\frac{1}{2} \\ \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{x-y}{2} &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ değerini kullanırsak,

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

buluruz. Bu denklemi çözersek

$$\begin{aligned} \cos\frac{x-y}{2} &= \cos\frac{\pi}{3} \\ \frac{x-y}{2} &= 2k\pi \mp \frac{\pi}{3} \\ x-y &= 4k\pi \mp \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde başlangıçtaki trigonometrik denklem sistemi, aşağıdaki iki cebirsel denklem sistemine dönüşmüş olur.

$$\begin{cases} x+y = \frac{4\pi}{3} \\ x-y = 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} (1)$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{4\pi}{3} \\ x-y = 4k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} (2)$$

(1) sistemini çözersek

$$\begin{aligned} 2x &= 4k\pi + 2\pi \\ x_1 &= 2k\pi + \pi \\ y_1 &= \frac{\pi}{3} - 2k\pi, \end{aligned}$$

(2) sistemini çözersek

$$\begin{aligned} 2x &= 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x_2 &= 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ y_2 &= \pi - 2k\pi \end{aligned}$$

çözümlerini elde ederiz. Çözümlerde k bir tamsayıdır.

Örnek 3. *Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:*

$$\begin{aligned} x+y &= 2\pi, \\ \tan x \tan y &= -1 \end{aligned}$$

Çözüm. İkinci denklemi dönüştürmeye çalışalım:

$$\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = -1.$$

Sol tarafın payını sinüslerin çarpımı, paydasını ise kosinüslerin çarpımı formüllerinden yararlanarak yeniden yazalım:

$$\frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]} = -1.$$

$\cos(x+y) = \cos 2\pi = 1$ değerini kullanırsak

$$\frac{\cos(x-y) - 1}{1 + \cos(x-y)} = -1$$

buluruz. İşlemleri yaparak düzenlersek $\cos(x-y) = 0$ denklemine ulaşırız. Bunu çözelim:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos\frac{\pi}{2} \\ x-y &= 2k\pi \mp \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

O halde iki cebirsel denklem sistemi elde etmiş olduk. $x+y = 2\pi$ ile $+$ işaretli sistemi çözersek

$$\begin{aligned} x_1 &= k\pi + \frac{5\pi}{4} \\ y_1 &= \frac{3\pi}{4} - k\pi, \end{aligned}$$

$-$ işaretli sistemi çözersek

$$\begin{aligned} x_2 &= k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ y_2 &= \frac{5\pi}{4} - k\pi \end{aligned}$$

sonuçlarını elde ederiz. Her iki çözümde de k bir tamsayıdır.

Örnek 4. *Aşağıdaki trigonometrik denklem sistemini çözünüz:*

$$\begin{aligned} x-y &= \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\sin y} &= 2 \end{aligned}$$

Çözüm. $a/b = c/d$ biçimindeki bir orantının

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

biçiminde yazılabileceğini biliyoruz. İkinci denkleme bu orantı özelliğini uygulayalım:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Denklemin sol tarafının pay ve paydasını sinüslerin farkı ve toplamı formülleri yardımıyla yeniden yazalım:

$$\frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Şimdi

$$\sin\frac{x-y}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

değerlerini yerlerine koyalım:

$$\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x+y}{2}}=\frac{1}{3}$$
$$\cot\frac{x+y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot\frac{x+y}{2}=\cot\frac{\pi}{3}$$
$$\frac{x+y}{2}=k\pi+\frac{\pi}{3}$$
$$x+y=2k\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

O halde denklemimiz aşağıdaki cebirsel denklem sistemine dönüşmüş olur:

$$x-y=\frac{\pi}{3}$$
$$x+y=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$$

Bu sistemin çözülmesiyle, k bir tamsayı iken,

$$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$
$$y=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

çözümleri elde edilir.

Denklemlerin İkisini Birden Dönüştürmek

Örnek 5. *Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:*

$$\cos x+\cos y=1$$
$$\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

Çözüm. Birinci denklemdeki kosinüsleri yarım açı cinsinden

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

şeklinde yazıp ara işlemleri yaparsak,

$$\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{y}{2}=\frac{3}{2}$$
$$\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

sistemini elde ederiz. $\cos\frac{x}{2}=u$ ve $\cos\frac{y}{2}=v$ dönüşümünü yaparsak,

$$u^2+v^2=\frac{3}{2}$$
$$u+v=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Birinci denklemin sol tarafını $(u+v)^2-2uv$ biçiminde yazacak ve $(u+v)$'nin değerini gözönüne olacak olursak aşağıdaki sisteme ulaşırız:

$$u+v=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$
$$uv=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bu sistem de değişkenlerden birini diğeri cinsinden ifade edip ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem elde edilerek çözülebilir. Fakat biz burada kolayca gözüktüğü için, kökleri tahmin ederek çözüme ulaşmayı tercih edeceğiz. Çarpımları $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, toplamları $\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ olan bir çift sayı vardır: -1 ve $\frac{\sqrt{2}}{2}$. O halde x ve y bilinmeyenlerini bulmak için,

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{y}{2}=-1$$

sistemini çözmek gerekir. Bunların çözülmesiyle aşağıdaki çözümler elde edilir:

$$x_1=\mp\frac{\pi}{2}+4k\pi,\qquad y_1=2\pi+2n\pi,$$
$$x_2=2\pi+4p\pi,\qquad y_2=\mp\frac{\pi}{2}+4q\pi.$$

k,n,p,q tamsayılardır.

Örnek 6. *Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:*

$$\cos x+\cos y=1$$
$$\cos 3x+\cos 3y=1$$

Çözüm. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ eşitliği ikinci denklemde yerine konup düzenlenirse

$$4(\cos^3 x+\cos^3 y)-3(\cos x+\cos y)=1$$
$$\cos^3 x+\cos^3 y=1$$

bulunur.

$$(\cos x + \cos y)^3 = \cos^3 x + \cos^3 y + 3\cos x \cos y(\cos x + \cos y)$$

özdeşliğinden $\cos^3 x + \cos^3 y = 1$ değerini çekersek,

$$\begin{aligned}(\cos x + \cos y)^3 - 3\cos x \cos y(\cos x + \cos y) &= 1\\ 1 - 3\cos x \cos y &= 1\\ \cos x \cos y &= 0\end{aligned}$$

olacaktır. O halde başlangıçtaki sistem, aşağıdaki biçime dönüşmüş olur:

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 1\\ \cos x \cos y &= 0.\end{aligned}$$

İkinci denklemdeki çarpanları ayrı ayrı sıfıra eşitleyerek iki denklem sistemi elde edilir:

$$\cos x = 0, \qquad \cos y = 1, \qquad (1)$$

$$\cos y = 0, \qquad \cos x = 1. \qquad (2)$$

(1) sistemini çözersek

$$x_1 = 2k\pi \mp \frac{\pi}{2}, \qquad y_1 = 2n\pi,$$

(2) sistemini çözersek

$$y_2 = 2m\pi \mp \frac{\pi}{2}, \qquad x_2 = 2p\pi$$

çözümleri elde edilir. k, m, n, p tamsayılardır.

Örnek 7. *Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:*

$$\begin{aligned}\sin y - \sqrt{2}\sin x &= 0\\ 2\cos x + \cos y &= 1\end{aligned}$$

Çözüm. Bu problemi çözerken $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ özdeşliğinden yararlanacağız. Birinci denklemden $\sin y = \sqrt{2}\sin x$ olur ve bunun karesi alınarak $\sin^2 y = 2\sin^2 x$ bulunur. İkinci denklemden $\cos y = 1 - 2\cos x$ olur ve bunun karesi alınarak $\cos^2 y = (1-2\cos x)^2$ bulunur. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ denkleminde bunları kullanırsak,

$$\begin{aligned}2\sin^2 x + (1 - 2\cos x)^2 &= 1\\ 2\sin^2 x + 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x &= 1\\ 2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\cos^2 x - 4\cos x &= 0\\ 2\cos^2 x - 4\cos x + 2 &= 0\\ (\cos x - 1)^2 &= 0\\ \cos x &= 1\end{aligned}$$

basit trigonometrik denklemi elde edilir. Bunun çözülmesiyle de $x = 2k\pi$ bulunur. Öteki bilinmeyen ise,

$$\begin{aligned}\cos y &= 1 - 2\cos x\\ \cos y &= -1\\ y &= 2n\pi \mp \pi\end{aligned}$$

olarak elde edilir. k ve n tamsayıdır.

Bazı durumlarda denklem sistemi verilirken, köklerin bazı yan koşulları sağlaması da istenebilir. Bu durumda sistemi çözüp, sonra da istenen koşulları sağlayan çözümleri ayırmak bir çok durumda son derece güç olabilir. Böyle durumlarda istenen koşullara uygun kökleri doğrudan doğruya elde etmeye çalışmak daha kolay olabilir. Şimdi de bununla ilgili bir örnek yapalım.

Örnek 8. *Aşağıdaki denklem sisteminin,* $0 < x < \pi$ *ve* $\pi < y < 2\pi$ *koşullarını sağlayan çözümlerini bulunuz:*

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= -\frac{1}{4}\\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Çözüm. Sinüslerin çarpımını kosinüslerin farkı biçiminde yazarsak, sistem aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\begin{aligned}\cos(x-y) - \cos(x+y) &= -\frac{1}{2}\\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Buradan ise şu basit sistemi elde ederiz:

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \frac{1}{2}\\ \cos(x+y) &= 1.\end{aligned}$$

Bu sistemin $0 < x < \pi$ ve $\pi < y < 2\pi$ aralıklarında bulunan çözümlerini arıyoruz. O halde

$$\begin{aligned}-2\pi < x - y < 0\\ \pi < x + y < 3\pi\end{aligned}$$

olmalıdır. $x - y$ farkı -2π ile 0 arasında bulunuyorsa, $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$ denklemi yalnızca iki halde sağlanır: $x - y = -\pi/3$ ve $x - y = -5\pi/3$. $x + y$ toplamı ise, π ile 3π arasında bulunuyorsa, $\cos(x+y) = 1$ denklemi yalnızca bir halde sağlanır: $x + y = 2\pi$. O halde aşağıdaki iki cebirsel denklemin çözülmesi aradığınız tüm çözümleri verecektir:

$$x-y=-\frac{\pi}{3}, \qquad x+y=2\pi, \tag{1}$$

$$x-y=-\frac{5\pi}{3}, \qquad x+y=2\pi. \tag{2}$$

Bu iki denklem sisteminin çözülmesiyle;

$$x_1=\frac{5\pi}{6}, \qquad y_1=\frac{7\pi}{6},$$
$$x_2=\frac{\pi}{6}, \qquad y_2=\frac{11\pi}{6}.$$

elde edilir.

Bazan da verilen karışık bir tek trigonometrik denklemin çözümü, onu bir denklem sistemi haline getirerek bulunur. Bazı durumlarda ise bu denklem sistemini elde etmekte eşitsizlikler kullanılır.

Örnek 9. *Aşağıdaki denklemin çözüm kümesini bulunuz:*

$$\begin{aligned} x^{x+4} &- 2x^{x+3} - 2(\cos\pi x - 1)x^{x+2} \\ &+ 4(\cos\pi x - 1)x^{x+1} - x^3 + 2x^2 \\ &+ 2(\cos\pi x - 1) - 4(\cos\pi x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Çözüm. Verilen denklemi çarpanlara ayıralım:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2) \\ &\quad -2(\cos\pi x - 1)(x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2) \\ 0 &= (x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2)(x^2 - 2\cos\pi x + 12) \end{aligned}$$

Şimdi birinci çarpanı sıfıra eşitleyelim:

$$x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2 = 0.$$

Bu ifadeyi gruplama yöntemiyle çarpanlara ayıralım:

$$\begin{aligned} x^{x+2} - 2x^{x+1} - x + 2 &= 0 \\ x(x^{x+1} - 1) - 2(x^{x+1} - 1) &= 0 \\ (x^{x+1} - 1)(x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

İkinci çarpandan $x_1 = 2$ çözümü elde edilir. İlk çarpan $x^{x+1} = 1$ verir. Bir üslü ifadenin 1'e eşit olması için ya üssü sıfıra ya da tabanı 1'e eşit olmalıdır. O halde $x_2 = -1$ ve $x_3 = 1$ elde ederiz. Şimdi de başlangıçta bulduğumuz ikinci çarpanı sıfıra eşitleyelim: $x^2 + 2 = 2\cos\pi x$. Bu denklemi çözebilmek için eşitsizliklerden yararlanacağız. Bu denklemin sol tarafı daima $x^2+2 \geq 2$ koşulunu, sağ taraf ise $-2 \leq 2\cos\pi x \leq 2$ koşulunu sağlar. İki tarafın birbirine eşit olabilmesi için, (bir başka deyişle, ele aldığımız ikinci çarpanın sıfıra eşit olabilmesi için, her iki tarafın aynı anda 2'ye eşit olması gerekmektedir. Yani

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= 2 \\ 2\cos\pi x &= 2 \end{aligned}$$

denklem sisteminin sağlanması gerekir. Birinci denklemden $x = 0$ bulunur. Bu kökün ikinci denklemi de sağlaması gerektiğinden $x = 0$ değeri burada yerine konulmalıdır. Bu değerin ikinci denklemi sağladığı görülmektedir. O halde $x_4 = 0$ değeri de çözüm kümesinin elemanıdır.

Örnek 10. *Aşağıdaki denklemin çözüm kümesini bulunuz:*

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 8 = 0$$

Çözüm. Denklemi aşağıdaki biçimde yeniden yazalım:

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 - 4x + 4) \\ &\quad + (y^2 - 4y + 4) \\ 0 &= (x-y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ -(x-y)^2 &= (x-2)^2 + (y-2)^2. \end{aligned}$$

Bu denklemin sol tarafı $(x-2)^2+(y-2)^2 \geq 0$, sol tarafı ise $-(x-y)^2 \leq 0$ koşulunu sağlar. Eşitlik her iki denklemin aynı anda sıfıra eşit olmaları halinde mümkün olur:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-2)^2 &= 0 \\ -(x-y)^2 &= 0 \end{aligned}$$

İlk denklemden $x = y$ bulunur. Bu eşitlik ikinci denklemde kullanılırsa $2(x-2)^2 = 0$, böylece $x = 2$, ve buradan da $y = 2$ bulunur.

KAYNAKÇA

[1] Y. Aksoy, *Trigonometri*, İstanbul, 1972.

[2] T. Caronnet, *Çözümlü Trigonometri Probemleri*, İstanbul, 1969.

[3] G. Dorofeev, *Elementary Mathematics*, Mir, Moskova, 1988.

[4] B. Dündar, *Trigonometri*, Ankara, 1988.

[5] C. A. Ertuğ, *Trigonometrik DEnklemlerin Çözülmesi*, *Matematik Dünyası*, **5**, sayı 2, 6–12 (1995).

[6] E. Ülsoy, *Düzlem ve Küresel Trigonometri*, İstanbul, 1969.