az 2^{128} Carmichael sayısının varlığını kanıtlar ki bu hakikaten büyük bir sıçramadır [4]. Alford'ın katkısı ile başlayan olumlu gelişmeler 1992 yılında Alford, Granville ve Pomerance'ın kanıtladığı teorem ile Carmichael sayılarının gerçekten sonsuz tane olduğu gösterdi:

Teorem. *Yeteri kadar büyük bir x doğal sayısı için, x'ten küçük Carmichael sayılarının sayısı $x^{2/7}$'den büyüktür.*

$x \to \infty$ iken $x^{2/7} \to \infty$ olduğundan, bu teorem gerçekten Carmichael sayılarının 1912'de ileri sürüldüğü gibi sonsuz tane olduğunu gösteriyor ve sayılar kuramının ünlü bir problemi daha tarih oluyordu.

Teşekkür. *Yazımı okuduktan sonra [4] numaralı kaynağı dikkatime sunan sevgili Ersan Akyıldız'a teşekkür ederim.*

KAYNAKÇA

[1] A. G. Aksoy, *Fibonacci Sayıları, Matematik Dünyası*, 5, sayı 4, 13–16 (1995).

[2] Ş. Alpay, *Karanlık Çağın Aydınlığı: Fibonacci, Bilim ve Ütopya*, Ocak (1995).

[3] Ş. Alpay, *Aydınlanma Çağı ve Matematik, Bilim ve Ütopya*, Kasım (1995).

[4] A. Granville, *Primality Testing and Carmichael Numbers, Notices of the American Mathematical Society*, **39**, 696–700 (1992).

[5] H. T. Kaptanoğlu, *Sayılar Dünyasında Gezintiler, Matematik Dünyası*, **4**, sayı 4, 12–16 (1994).

BİR ALGORİST: LEONHARD EULER

Nurettin Çalışkan *

Akıllıca yöntemler bularak ya da oyunlarla problem çözen insanlara *algorist* adı veriliyor.

1707–1783 yılları arasında yaşayan İsviçreli matematikçi Leonhard Euler, matematik dünyasının yetiştirdiği en büyük algorist olarak biliniyor. Euler'in algoristliği, problemi karmaşıklıktan kurtarıp kolaylaştırmasında ve farklı yöntemler kullanarak çözmesinde yatar. Bu yazıda, Euler'in yakınsak serilerin toplamını bulmada kullandığı yöntemi aktaracağız.

İsviçreli matematikçi Jacques Bernoulli yakınsak serilerin toplamları üzerine çalışıyordu. Bir türlü toplam değerini bulmayı beceremediği

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

yakınsak serisinin toplamının ne olduğu sorusunu ortaya attıktan sonra, bir çok matematikçi gibi Euler da bu seri ile ilgilendi. Önceleri toplama çok yakın değerler bulsa da Euler bunun ile yetinmedi. Sonuçta büyük tartışmalara yol açan bir yöntemle problemi çözmeyi başardı. Aşağıda vereceğimiz yönteminde Euler, sonlu toplamın özelliklerini sonsuz toplama uygulayarak sonuca ulaşıyordu.

n'yinci dereceden

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$$

denkleminin $x_1, \ldots, x_n$ gibi n tane birbirinden farklı reel kökünün var olduğunu kabul edelim. Bu koşulla denkleme denk

$$a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. a_0 sayısının sıfırdan farklı olduğunu kabul edersek, denklemin bütün çözümleri sıfırdan farklı olur. Bu durumda $y = 1/x$ dönüşümünü kullandığımızda ilk denklem

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

şekline dönüşür. Bu denklemin çözümleri ise

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$$

olacaktır. Böylece, n tane reel farklı köke sahip, $a_0 \neq 0$ özelliği bulunan n'yinci dereceden bir

* Doğu Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim görevlisi

denklem için

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n = a_0\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$$

eşitliği vardır ve

$$-a_1 = a_0\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

olur.

Aynı şekilde, kökleri $\pm z_1, \pm z_2, \ldots, \pm z_n$ olacak şekilde $2n$'yinci dereceden

$$b_0 - b_1z^2 + b_2z^4 + \cdots + (-1)^n b_n z^{2n} = 0$$

polinomu için, $b_0 \neq 0$ olarak alındığında

$$\begin{aligned} &b_0 - b_1z^2 + b_2z^4 + \cdots + (-1)^n b_n z^n \\ &= b_0\left(1-\frac{z^2}{z_1^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{z_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{z_n^2}\right)\end{aligned}$$

olur ve

$$b_1 = -b_0\left(\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\cdots+\frac{1}{z_n^2}\right)$$

elde edilir. Bu bilgilerden sonra Euler'in

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

serisinin toplamını bulmada kullandığı yönteme geçebiliriz.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktası etrafında Taylor açılımını yazdığımızda elde edilen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

denkleminin kökleri $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm n\pi, \ldots$ olacaktır. Denklemde her iki tarafı x'e bölerek sıfırdan farklı çözümleri aldığımızda

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda gösterdiğimiz katsayılar ve kökler arasındaki bağıntıyı kullanarak

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\cdots+\frac{1}{(n\pi)^2}+\cdots$$

ya da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

bulunur.

Problemin çözümüne ilk itiraz Jacques Bernoulli'nin yeğeni Daniel Bernoulli'den geldi: $\sin x = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesi üzerinde çözümü yok muydu? İkincisi, bu denklemin reel sayılar kümesi üzerinde 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\ldots$, $\pm n\pi$, $\ldots$ sayıları dışında çözümü olamaz mıydı? Üçüncüsü ise, bir serinin çarpım halinde yazılması olanaklı mıydı?

Euler önceleri eleştirileri önemsemedi; çok sonraları ise, bütün bu soruları yanıtladı:

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n - \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}P_n(x)\end{aligned}$$

yazdıktan sonra, $P_n(x)$ polimonunun karmaşık kökünün bulunmadığını gösterdi. n sayısının tek sayı olması koşuluyla

$$\frac{P_n(x)}{x} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{n^2\tan(k\pi/n)}\right)$$

eşitliğinin var olduğunu ve bu yazılımda, bütün k değerleri için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n(x)}{x} = k\pi$$

olduğunu kanıtladı. Seri, bütün x değerleri için mutlak yakınsak olduğundan, toplamın çarpım halinde yazılabilmesini olanaklı kılıyordu.

Euler daha sonraları aynı yöntemi uygulayarak birçok serinin toplamını hesapladı. Onların birkaçına bu yazıda yer vereceğiz. Kökleri $\pm u_1$, $\pm u_1 i$, $\pm u_2$, $\pm u_2 i$, $\ldots$, $\pm u_n$, $\pm u_n i$ olan $4n$'yinci dereceden denklem

$$\begin{aligned}&c_0 - c_1u^4 + \cdots + (-1)^n c_n u^{4n} \\ &= c_0\left(1-\frac{u^4}{u_1^4}\right)\left(1-\frac{u^4}{u_2^4}\right)\cdots\left(1-\frac{u^4}{u_n^4}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir ve $c_0 \neq 0$ koşulunda

$$c_1 = -c_0\left(\frac{1}{u_1^4}+\cdots+\frac{1}{u_n^4}\right)$$

olur.

Şimdi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

serisini toplamak için $f(x) = \sin x \sinh x$ fonksiyonunu kullanacağız. $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerleri 0, $\pm\pi$, $\pm\pi i$, $\pm 2\pi$, $\pm 2\pi i$, $\ldots$, $\pm n\pi$, $\pm n\pi i$, $\ldots$ olur.

$$\begin{aligned}
\sin x \sinh x &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&\quad \cdot \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \\
&= x^2 - \left[\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{2}{5!}\right] x^6 \\
&\quad + \left[\frac{2}{9!} - \frac{2}{3!\,7!} + \left(\frac{1}{5!}\right)^2\right] x^{10} + \cdots
\end{aligned}$$

yazılır. Sıfırdan farklı çözümleri aradığımızdan,

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x \sin hx}{x^2} &= 1 - \left[\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{2}{9!}\right] x^4 \\
&\quad + \left[\frac{2}{9!} - \frac{2}{3!\,7!} + \left(\frac{1}{5!}\right)^2\right] x^8 + \cdots
\end{aligned}$$

açılımını kullanacağız. Elde ettiğimiz bu "sonsuz terimli" polinomun kökleri $\pm\pi$, $\pm\pi i$, $\pm 2\pi$, $\pm 2\pi i$, $\ldots$, $\pm n\pi$, $\pm n\pi i$, $\ldots$ olduğundan, en son elde ettiğimiz denklemin sağ tarafı

$$\left(1 - \frac{x^4}{\pi^4}\right)\left(1 - \frac{x^4}{(2\pi)^4}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^4}{(n\pi)^4}\right)\cdots$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak

$$\left(\frac{1}{3!}\right)^2 - \frac{2}{5!} = \frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{(2\pi)^4} + \cdots + \frac{1}{(n\pi)^4} \cdots$$

ya da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

bulunur.

Şimdi de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

toplamını bulmaya çalışalım. Bunun için $\cos x$ fonksiyonunu kullanacağız. $\cos x = 0$ denkleminin kökleri $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \cdots$'dir. Taylor açılımını yazdığımızda

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots \\
&= \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{(3\pi)^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{(5\pi)^2}\right)\cdots
\end{aligned}$$

olur. Kökler ve katsayılar arasındaki bağıntı kullanılarak

$$\frac{1}{2!} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{(3\pi)^2} + \cdots + \frac{4}{(n\pi)^2} + \cdots,$$

buradan da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} = \frac{\pi^2}{8}$$

elde edilir.

$f(x) = \sin x - 1$ fonksiyonunu düşünelim. $f(x) = 0$ yapan x değerleri $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \cdots$ olacaktır. $\sin x$ fonksiyonu $y = 1$ doğrusuna bu noktalarda teğet olduğundan, kökler çift katlıdır. O halde

$$\begin{aligned}
\sin x - 1 &= -1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots \\
&= -\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)^2\left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right)^2\left(1 - \frac{2x}{5\pi}\right)^2\cdots
\end{aligned}$$

yazılabilir. Çarpımı açtığımızda x'li terimin katsayısının

$$\frac{4}{\pi} - \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{5\pi} - \frac{4}{7\pi} + \frac{4}{9\pi} + \cdots$$

olduğu görülebilir. Bu toplamı Taylor açılımının x'li terimin katsayısına eşitlediğimizde

$$1 = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{5\pi} - \frac{4}{7\pi} + \frac{4}{9\pi} + \cdots$$

ya da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

bulunur. Böylece Euler'in yöntemini kullanarak Leibniz serisi olarak bilinen serinin toplamını bulmuş olduk.