PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A116. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde AC çaptır ve $|DC| < |CB| < |BA| < AD|$ geçerlidir. Çemberin çapı r olduğuna göre, alan$(ABCD) \leq 2r^2$ olduğunu gösteriniz. (*Cuma Arslan*)

A117. $\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k k^2$ toplamını hesaplayınız. (*Ergün Yaraneri*)

A118. Bir çemberin dışındaki bir A noktasından, çembere B ve C noktalarında değen teğetler ile A'dan geçen ve çemberi birbirinden farklı E ve G noktalarında kesen bir doğru çiziliyor.

$$\frac{|AE|}{|AG|} = \frac{|EF|}{|FG|}$$

olduğunu gösteriniz. (*Recep Zihni*)

A119. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 30°$ ve $\widehat{ACB} = 45°$'dir. $[AB]$ üzerinde $|AL| = |LB|$ olacak şekilde bir L noktası, $[BC]$ üzerinde de $\widehat{LKA} = 30°$ olacak şekilde bir K noktası alınıyor. $[AK] \cap [LC] = \{M\}$ ise, $\widehat{CMA}$)'yı hesaplayınız. (*Alaattin Aktaş*)

A120. 1 ve 1000 dahil olmak üzere, 1'den 1000'e kadar tüm doğal sayıların rakamları toplamını hesaplayınız. (*Cuma Arslan*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y116. Bir ABC üçgeninde A, B, C köşelerinden geçen yükseklikler çevrel çemberi ikinci defa A', B', C' noktalarında keserlerse ve $A'B'C'$ üçgeninin alanı S ile gösterilirse,

$$|AA'|^2 \sin 2A + |BB'|^2 \sin 2B + |CC'|^2 \sin 2C > 6S$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Rauf Harput*)

Y117. Çevrel çemberinin yarıçapı R olan düzgün bir n-gende, bir köşenin diğerlerinden uzaklıklarının toplamının $2R \cot \pi/2n$ ve çarpımının nR^{n-1} olduğunu gösteriniz. (*Ferit Öktem*)

Y118. Bir ABC üçgeninin alanı S, çevrel çember yarıçapı R ve içteğet çember yarıçapı r ise,

$$\frac{27Rr^3}{2} \leq S^2 \leq \frac{r(4R+r)^3}{27}$$

olduğunu gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

Y119. Eksen uzunlukları $2a$ ve $2b$ olan bir elipsin herhangi bir noktasından çizilen normalinin elips içinde kalan kısmının uzunluğunun alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz. (*Süreyya Tevfik*)

Y120. $[AB]$ ve $[CD]$ kenarları paralel olan $ABCD$ yamuğunun A ve D köşelerinden çizilen içaçıortaylar X, C ve D köşelerinden çizilen içaçıortaylar Y noktasında kesişiyor. $|XY|$'yi yamuğun kenar uzunlukları cinsinden ifade ediniz. (*Coşkun Üstün*)

ÇÖZÜMLER

A106: $\dfrac{1}{\cos 0° \cos 1°} + \dfrac{1}{\cos 1° \cos 2°} + \cdots + \dfrac{1}{\cos 88° \cos 89°} = \dfrac{\cos 1°}{\sin^2 1°}$ olduğunu kanıtlayınız. (*Turgay Uçkun*)

Çözüm. İki açının toplamının sinüsü formülünden

$$\tan(x+1) - \tan x = \frac{\sin(x+1)}{\cos(x+1)} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 1°}{\cos(x)\cos(x+1)}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\sum_{x=0°}^{88°} \frac{\sin 1°}{\cos(x)\cos(x+1)} &= \sum_{x=0°}^{88°} (\tan(x+1) - \tan(x)) \\ &= \tan 1° - \tan 0° \\ &\quad + \tan 2° - \tan 1° \\ &\quad + \cdots + \tan 89° - \tan 88° \\ &= \tan 89° = \frac{\sin 89°}{\cos 89°} = \frac{\cos 1°}{\sin 1°}\end{aligned}$$

elde edilir; buradan istenen eşitlik derhal yazılabilir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Zafer Bingöl, Hasan Denker, Suat Dinçer, Yaman Duruman, Vedat Keleş.*)

A107. Köşegenleri K noktasında kesişen $ABCD$ kirişler dörtgeninde AKB, BKC, CKD ve DKA üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırayla R_a, R_b, R_c, R_d ise, $\frac{R_a+R_c}{R_b+R_d} = \frac{a+c}{b+d}$ olduğunu gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. ABC üçgeninde $\widehat{AKB} = \alpha$ diyelim. $a = 2R_a \sin\alpha$ ve $b = 2R_b \sin(180° - \alpha)$ olur. Bunlardan ve benzer şekilde

$$\frac{a}{b} = \frac{R_a}{R_b}, \quad \frac{c}{b} = \frac{R_c}{R_b}, \quad \frac{a}{d} = \frac{R_a}{R_d}, \quad \frac{c}{d} = \frac{R_c}{R_d}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{R_a + R_c}{R_b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{ve} \quad \frac{R_a + R_c}{R_d} = \frac{a+c}{d},$$

ve nihayet

$$\frac{R_a + R_c}{R_b + R_d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bulunur.

(**Çözenler:** *Zafer Bingöl, Hasan Denker, Suat Dinçer, Yaman Duruman, Aylin Kazancıoğlu.*)

A108. Başlangıçta A noktasında bulunan bir kurbağa, her adımda eşit olasılıkla ya doğu ya da batı istikametinde sıçramaktadır. İlk sıçrayışı 64 metre, bundan sonraki her sıçrayışı bir öncekinin yarısı kadar olmaktadır. 400 sıçrama sonunda kurbağanın A noktasına 20 metreden daha yakında bulunması olasılığını hesaplayınız. (*Akın Bayazıt*)

Çözüm. Başlangıç noktasına 20 metreden daha yakın kalabilmek için ya ilk dört sıçrayış $DBBB$ (Doğu, Batı, Batı, Batı) veya $BDDD$, ya da ilk altı sıçrayış $DBBDBB$ veya $BDDBDD$ şeklinde olmalıdır. Bunların dışındaki hallerde, son uzaklık 20 metreden fazla olacaktır. Bu hallerin olasılıkları toplamı

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

olarak bulunur.

(**Çözenler:** *Zafer Bingöl, Selami Çorak, Hasan Denker, Suat Dinçer, Murat Seferoğlu.*)

A109. $\{F_n\}$ dizisi, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geq 0)$ şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisini gösterirse, her a ve b pozitif tamsayıları için, $F_k = a \pmod{3^b}$ şeklinde bir k tamsayısı bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm. Fibonacci sayıları için $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n$ bağıntısını hatırlayalım. Şimdi a'yı sabit tutalım ve belirli bir b için $F_k \equiv a \pmod{3^b}$ olacak şekilde bir k bulunabileceğini kabul edelim. $F_{8\cdot 3^{b-1}} \equiv 3^b \pmod{3^{b+1}}$ ve $F_{8\cdot 3^{b}-1} - 1 \equiv 3^b + 1 \pmod{3^{b+1}}$ olduğundan, $\{k, k+8\cdot 3^{b-1}, k+16\cdot 3^{b-2}\}$ kümesinin elemanlarından birisi için istenilen elde edilecektir. Öte yandan $b = 1$ alındığında, $F_2 \equiv 1 \pmod 3$, $F_3 = 2 \pmod 3$ ve $F_4 = 0 \pmod 3$ olduğundan, tümevarımla ispat tamamlanır.

(**Çözenler:** *Gültekin Pulat.*)

A110. $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ dizisinin n'yinci elemanını belirleyiniz. (Dizide her m sayısı, m kez tekrarlanmaktadır.) (*Yaman Duruman*)

Çözüm. Dizinin n'yinci elemanına a_n diyelim. m sayısı ilk kez yazıldığında, kendisinden önce yazılmış

$$1 + 2 + \cdots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$$

sayı bulunacağından, bu sayı $\frac{m(m-1)}{2} + 1$'inci terim olacaktır.

$$\frac{m(m-1)}{2} + 1 = n$$

denkleminin çözümünden

$$m = \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$a_n = \left[\!\left[\frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right]\!\right]$$

olacağını görmek zor değildir.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Sedat Ayberk, Hasan Denker, Yaman Duruman, Aylin Kazancıoğlu.*)

Y106. Bir ABC üçgeninde A açısının içaçıortayı $[BC]$ kenarını L, ABC üçgeninin çevrel çemberini A ve N noktalarında kesiyor. L'den AB ve AC doğrularına inilen dikme ayakları sırayla K ve M ise, alan(ABC) = alan$(AKNM)$ olduğunu gösteriniz. (*Turgay Uçkun*)

Çözüm. $[AB]$ üzerinde $|AC'| = |AC|$ olacak şekilde C' noktasını işaretleyelim. N'den AB'ye inilen dikme ayağı C'' olsun. KLA ile MLA eş üçgenlerdir ve $C''NA$ ile CNA eş üçgenlerdir. ALM üçgeninde M köşesinden çizelen yüksekliğe h' ve $|ML| = h$ diyelim. $\widehat{BAL} = \widehat{MAL} = \widehat{LMK} = \alpha$ olsun. $2|AC''| = b + c$ olduğundan,

$$\cos\alpha = \frac{|AC''|}{|AN|} = \frac{h'}{h}$$

eşitliğinden

$$h'|AN| = \frac{hb}{2} + \frac{hc}{2}$$

elde edilir. Bu ise $\text{alan}(AKNM) = \text{alan}(ACL) + \text{alan}(ABL) = \text{alan}(ABC)$ demektir.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Murat Aygen, Zafer Bingöl, Hasan Denker, Yaman Duruman, Aylin Kazancıoğlu, İsmet Konakçı.*)

Y107. ABC ve PQR üçgenleri verildiğinde herhangi bir X noktası için $[PX]$, $[QX]$, $[RX]$ doğrularının $[DC]$, $[CA]$, $[AB]$ doğrularını kestiği noktalar sırayla A_x, B_x, C_x olsun. $[B_xC_x] \parallel [QR]$, $[C_xA_x] \parallel [RP]$ ve $[A_xB_x] \parallel [PQ]$ olacak şekilde X noktasının varlığını gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Q'dan $[CA]$'ya ve R'den $[BA]$'ya çizilen paralel doğrular,

$$\frac{|XQ|}{|XB_x|} = \frac{|XP|}{|XA_n|} = \frac{|XR|}{|XC_x|}$$

olması nedeniyle $[XA]$'yı aynı bir D noktasında keserler. Benzer olarak $[XB]$ ve $[XC]$ üzerinde E ve F noktaları elde edilir. DEF üçgeninin kenarları ABC üçgeninin karşılıklı kenarlarına paralel olduğundan, ABC ile DEF homotetik iki üçgen olur. Bu durumda $[AD]$, $[BE]$ ve $[CF]$ doğruları noktadaş olur. Kesim noktaları da aranılan X noktası olur.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Akın Bayazıt, Hasan Denker, Gültekin Pulat.*)

Y108. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 60°$, $D \in [AC]$ için $AD = BC$'dir. $\widehat{BDC} = 30°$ ise, $\widehat{BAC}$'yi hesaplayınız. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. (*Ali Akın*) $[AB]$ üzerinde $\widehat{BDK} = 90°$ olacak şekilde bir K noktası alalım. $BCDK$ kirişler dörtgeni olduğundan $\widehat{BCK} = 90°$'dir. $[BK]$'nın orta noktası L ise

$$|AD| = |BC| = |BL| + |LK| = |LD|,$$

$\widehat{BAC} = \widehat{ALD} = \alpha$ ve $\widehat{LBD} = \widehat{LDB} = \frac{\alpha}{2}$ elde edilir. $\widehat{BAC} + \widehat{ALD} = \widehat{LDC}$ eşitliğinden $\alpha + \alpha = \frac{\alpha}{2} + 30°$ ve $\alpha = 20°$ bulunur.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Alaattin Aktaş, Murat Aygen, Haydar Bayazıt, Gültekin Pulat.*)

Y109. ABC üçgeninde içmerkez I, içteğet çember yarıçapı r, çevrel çember yarıçapı R ve A açısı karşısındaki dışteğet çemberin yarıçapı r_a'dır. BIC üçgeninin çevrel çember yarıçapı R_A ise, $R_A^2 = R(r_a - r)$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. BIC üçgeninin çevrel çember merkezi O' olsun. B ve C'den geçen çapların diğer uçları sırayla B' ve C' olsun.

$$\widehat{BIO'} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \quad \text{ve} \quad \widehat{CIO'} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$$

olduğundan, $\widehat{BIC} = 90° + \hat{A}/2$ elde edilir. $\widehat{CIC'} = \widehat{BIB'} = 90°$ olduğu için,

$$\widehat{BIC'} = \widehat{CBB'} = \widehat{CIB'} = \widehat{BCC'} = \frac{\hat{A}}{2}$$

ve $\widehat{BO'C'} = \hat{A}$ bulunur. O''den $[BC]$'ye bir dikme inilerek

$$R_A = \frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}$$

bulunur. $2u = a + b + c$ yazıp $ru = r_a u - r_a a$ eşitliğini hatırlayalım. Buradan $\frac{r_a a}{u} = r_a - r$ elde edilir. Yani istenileni göstermek için, $uR_A^2 = Rr_a a$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi sinüs teoriminden

$$a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

yazalım. Buradan

$$a^2 = 4Ra\cos^2\frac{A}{2}\tan\frac{A}{2}$$

yazabiliriz. Yani

$$\left[\frac{a}{2\cos\frac{A}{2}}\right]^2 = Ra\tan\frac{A}{2}$$

olur. Sonuçta

$$R_A^2 = Ra\tan\frac{A}{2} = \frac{Rar_a}{u}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Murat Aygen, Hasan Denker.*)