İKİ ÜSLÜ DİOFANT DENKLEMİ

Selma Atabey *

$z^x + 1 = t^y$ şeklindeki iki üslü Diofant denklemini inceleyeceğiz. İlk bakışta zor görülen bu denklemler sayılar teorisinin yöntemleri ile kolayca çözülebilir.

$z^x + 1 = (z+1)^y$ Diofant Denklemi

Bu Diofant denklemini sağlayan negatif olmayan tamsayılardan oluşan tüm (x, y, z) sıralı üçlülerini bulacağız. x, y, z keyfi negatif olmayan tamsayılar ise, (x, y, z), $(x, 1, 1)$, $(1, 1, z)$ üçlülerinin her birinin yukarıdaki denklemin çözümü olduğu kolayca görülebilir. x, y, z sayılarının en az biri 1'den küçük veya 1'e eşitse, bu üçlüler yukarıdaki denklemin tüm çözümlerini kapsıyor.

Şimdi ise $x_0 > 1$, $y_0 > 1$, $z_0 > 1$ verilen denklemin başka bir çözümü olsun. O zaman bir A tamsayısı için,

$$\begin{aligned} z_0^{x_0} &= (z_0+1)^{y_0} - 1 \\ &= z_0((z_0+1)^{y_0-1} + \cdots + (z_0+1) + 1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z_0^{x_0-1} &= (z_0+1)^{y_0-1} + \cdots + (z_0+1) + 1 \\ &= Az_0 + y_0 \end{aligned}$$

olur. Buradan hemen $z_0 \mid y_0$ ve

$$z_0^{x_0-1} - 1 = (z_0+1)((z_0+1)^{y_0-2} + \cdots + 1)$$

ya da

$$\begin{aligned} &(z_0-1)(z_0^{x_0-2} + \cdots + z_0 + 1) \\ &\qquad = (z_0+1)((z_0+1)^{y_0-2} + \cdots + 1) \end{aligned}$$

bulunur. z_0+1 ve z_0-1 sayılarının EBOB'unun 1 veya 2 olduğu gözönünde bulundurulursa, z_0+1 sayısının $2(z_0^{x_0-2} + \cdots + z_0 + 1)$ sayısını böldüğü görülür.

x_0 sayısının çift sayı olduğunu düşünelim. O zaman

$$\begin{aligned} &2(z_0^{x_0-2} + \cdots + z_0 + 1) \\ &= 2((z_0^{x_0-2} + z_0^{x_0-3}) + \cdots + (z_0^2 + z_0) + 1) \\ &= 2(z_0+1)(z_0^{x_0-3} + z_0^{x_0-5} + \cdots + z_0) + 2 \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı $z_0 + 1$ sayısı 2 sayısını bölmeli; bu da imkansızdır, çünkü $z_0 > 1$'dir. Dolayısıyla x_0 sayısı tek sayıdır; buradan

$$\begin{aligned} z_0^{x_0} + 1 &= (z_0+1)(z_0^{x_0-1} - z_0^{x_0-2} + \cdots - z_0 + 1) \\ &= (z_0+1)^{y_0} \end{aligned}$$

yazılabilir; yani

$$(z_0+1)^{y_0-1} = z_0^{x_0-1} - z_0^{x_0-2} + \cdots - z_0 + 1$$

dir. Fakat bu eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin sayısı tek sayı (x_0 tane) olduğundan, ancak z_0 çift ise bu eşitlik geçerli olacaktır. $z_0 \mid y_0$ olduğundan y_0 sayısı da çift sayıdır. Böylece, eğer $x_0 > 1$, $y_0 > 1$, $z_0 > 1$ verilen denklemin çözümü ise, x_0 sayısının tek sayı ve y_0 ile z_0 sayılarının da çift sayı olacağını gösterdik.

Bu durumda $z_1 \geq 1$ tek sayı ve $\alpha \geq 1$ olmak üzere, $z_0 = 2^\alpha z_1$ şeklindedir. $(z_0+1)^{y_0/2} - 1$ ile $(z_0+1)^{y_0/2} + 1$ sayıları çifttir, çünkü z_0 çifttir. Bu sayıların EBOB'unun 2 olmasından dolayı ve

$$\begin{aligned} z_0^{x_0} &= (z_0+1)^{y_0} - 1 \\ &= ((z_0+1)^{y_0/2} - 1)((z_0+1)^{y_0/2} + 1) \end{aligned}$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} (z_0+1)^{y_0/2} - 1 &= 2^u a^{x_0} \\ (z_0+1)^{y_0/2} + 1 &= 2^v b^{x_0} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $u + v = \alpha x$, $ab = z$ ve $(a, b) = 1$'dir. Öte yandan b, z_0'ı böler ve $(z_0+1)^{\frac{y_0}{2}} + 1$ ifadesi açıldığında $Bz_0 + 2$ şeklinde yazılabileceğinden $b = 1$'dir. İki ardışık çift sayıdan birisi 4'e bölünmez kuralından dolayı $u = 1$ veya $v = 1$'dir. Fakat $v = 1$ durumu, $z_0 > 1$ ve $y_0 > 1$ ile çelişkidedir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} (z_0+1)^{y_0/2} - 1 &= 2z_1^{x_0} \\ (z_0+1)^{y_0/2} + 1 &= 2^{\alpha x_0 - 1} \end{aligned}$$

* Ankara Atatürk Anadolu Lisesi matematik öğretmeni

olur. Bu iki denklemi taraf-tarafa çıkarırsak, $z_1^{x_0}+1=2^{\alpha x_0-2}$ bulunur, ya da

$$(z_1+1)(z_1^{x_0-1}-z_1^{x_0-2}+\cdots-z_1+1)=2^{\alpha x_0}-2,$$

çünkü x_0 tek sayıdır. Fakat z_1 de tek sayı olduğundan $z_1^{x_0-1}-z_1^{x_0-2}+\cdots-z_1+1$ sayısı da tek sayıdır; bu da ancak

$$z_1^{x_0-1}-z_1^{x_0-2}+\cdots-z_1+1=1,$$

yani $z_1=1$ ve $\alpha x_0-2=1$ ise geçerlidir. O zaman $\alpha x_0=3$'tür ve $x_0>1$ olduğundan, $\alpha=1$, $x_0=3$, $y_0=2$, $z_0=2$ elde edilir. Böylece $z^x+1=(z+1)^y$ Diofant denkleminin negatif olmayan tamsayılarda olan tüm çözümlerinin $(x,y,0)$, $(1,1,z)$, $(x,1,1)$ ve $(3,2,2)$ olduğunu gösterdik.

$p^x+1=t^y$ Diofant Denklemi

p önceden seçilmiş bir asal sayı ve biz verilen denklemi sağlayan, negatif olmayan tamsayılardan olaşuan tüm (x,y,t) sıralı üçlülerini bulacağız. x negatif olmayan bir tamsayı ise, $(x,1,p^x+1)$ şeklindeki her sıralı üçlünün verilen denklemin çözümü olduğu açıktır. Bu çözümlere esas çözümler diyeceğiz.

Şimdi ise (x_0,y_0,t_0) üçlüsü verilen denklemin esas olmayan çözümü olsun. O zaman $y_0>1$ ve $t_0>1$'dir ve

$$\begin{aligned}p^{x_0}&=t_0^{y_0}-1\\&=(t_0-1)(t_0^{y_0-1}+t_0^{y_0-2}+\cdots+t_0+1)\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı $t_0-1\mid p^{x_0}$ ve p asal olduğundan, $1\le\alpha\le x_0$ için $t_0-1=p^\alpha$ şeklindedir. Son denklemin her iki tarafını $t_0-1=p^\alpha$ ile sadeleştirirsek,

$$\begin{aligned}p^{x_0-\alpha}&=t_0^{y_0-1}+\cdots+t_0+1,\\p^{x_0-\alpha}-1&=(p^\alpha+1)^{y_0-1}+\cdots+(p^\alpha+1)\end{aligned}$$

bulunur; buradan da $p^\alpha+1\mid p^{x_0-1\alpha}-1$ olduğu görülür. $x_0-\alpha=k\alpha+r$, $0\le r<\alpha$, diyelim. O zaman

$$\begin{aligned}p^{x_0-\alpha}-1&=p^{k\alpha}p^r-1=p^{k\alpha}p^r-p^r+p^r-1\\&=p^r(p^{k\alpha}+1)-(p^r+1)\end{aligned}$$

olur; buradan da k sayısı çift olur. Gerçekten, k sayısı tek sayı olursa, $p^\alpha+1\mid p^{k\alpha}+1$ ve $p^r+1<p^\alpha+1$ olacaktır, bu da imkânsızdır. k çift olduğundan,

$$\begin{aligned}p^{x_0-\alpha}-1&=p^{(k-1)\alpha}p^{\alpha+r}+p^{\alpha+r}-p^{\alpha+r}+p^r-p^r-1\\&=p^{\alpha+r}(p^{(k-1)\alpha}+1)-p^r(p^\alpha+1)+p^r-1\end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $p^\alpha+1$, p^r-1'i böler; bu ancak $r=0$ ise geçerlidir; yani $x_0=(k+1)\alpha$ ise.

Buraya kadar yapılan yorumlardan verilen denklem $(p^\alpha)^{k+1}+1=(p^\alpha+1)^{y_0}$ şeklinde yazılabilir. Şimdi ilk çözdüğümüz Diofant denkleminin sonuçlarını $p\ge2$, $y_0>1$ ve $k+1$ tek sayı şartları ile birleştirirsek, $k+1=3$, $y_0=2$, $p^\alpha=2$ olduğu görülür, yani $\alpha=1$, $p=2$, $x_0=3$, $y_0=2$ ve $t_0=3$ elde edilir. Başka sözlerle, p tek asal sayı ise, $p^x+1=t^y$ Diofant denkleminin negatif olmayan tamsayılarda, esas olmayan çözümü yoktur; $p=2$ için de tek esas olmayan çözüm $(x,y,t)=(3,2,3)$'tür.

Matematik Dünyası Yazı Kuruluna,

Öncelikle matematiği çok seven ve ileride matematikçi olmak isteyen bir insan olarak bu dergiyi çıkardığınız için size teşekkür ediyor ve sizi kutluyorum. Ben İzmit Lisesi 6. dönem (3. sınıf) öğrencisiyim. Şu anda ÖYS sınavına hazırlanıyorum ve tek amacım bir matematik bölümüne girip ileride matematikçi olabilmek. Derginizin adını duydum ve matematiğe olan ilgim ve merakım nedeni ile hemen bir sayısını edindim. İçerdiği bilgilerin bir çoğu her ne kadar benim bilgi seviyemi aşsa da onu okumak bana büyük bir zevk verdi. Sizler matematiği gerçekten seven insanlar olarak "matematik dünyası"ndaki büyük bir boşluğu doldurdunuz. Derginizi okuyanların beyinlerini genişletiyor, onlara yeni şeyler kazandırıyorsunuz. Matematiği gerçekten seven tüm matematik dostlarına böyle güzel bir hizmet verdiğinizden dolayı sizi kutluyor ve çalışma azminizin ve zevkinizin hiç sönmemesi dileğiyle başarılarınız sürekli olsun diyorum.

Beyza Çalışkan