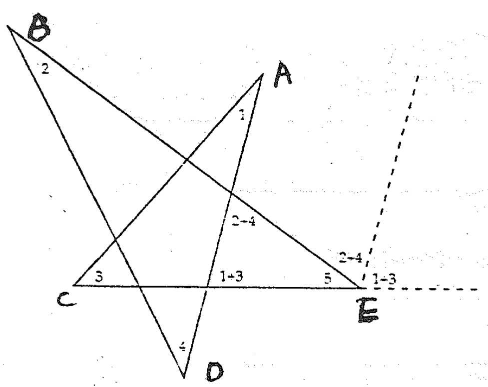
BAK-ANLA ŞEKİLLERİ

Şafak Alpay *

Bu sene ODTÜ kütüphanesine aldığımız kitaplardan birisi *Sözsüz Kanıtlar* idi [3]. 1993 yılında American Matematik Birliği tarafından öğrencilere yardımcı kitap olarak çıkartılan kitapta bol bol şekil ve çok az yazı var. Aşağıda örneklerini göreceğimiz şekiller, matematiksel bir ifadenin çözümüne/kanıtına ışık tutan, şekli inceleyip neyin sorulduğunu çözümüne bakıp anlamamıza yardımcı olan şekiller. Biz bunları BAŞ diye anacağız. İlk BAŞ'ı Martin Gardner *Scientific American* dergisinin Ekim 1973 sayısında vermiş ve o günden bu yana BAŞ'lar *Mathematics Magazine*, *The College Mathematics Journal* gibi dergilerin işlediği konulardan biri olmuş.

Einstein ve Pólya, Poincaré gibi matematikçiler matematik çalışırken her zaman şekiller üzerinde düşünülmesinin çok yararlı olacağını ileri sürmüşlerdir. Kuşkusuz şekiller tek başlarına kanıt değildirler. Onlar bir önermenin, problemin neden doğru veya yanlış olabileceğine ve/veya çözümün, kanıtın neden doğru, yanlış olabileceğini gösteren ipuçlarıdır. Örneğin beş köşeli yıldızın iç açıları toplamının 180° olduğu önermesini alalım. Hemen beş köşeli bir yıldız çizelim.

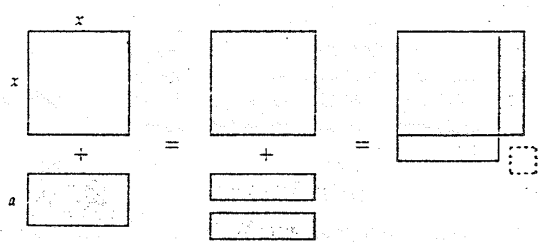


Açıları numaralayalım ve E köşesinden AD kenarına paralel çizelim. Bir dış açı kendisine komşu olmayan iç açılar toplamına eşittir. Dolayısı ile $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OCA$ ve $\sphericalangle OFE = \sphericalangle 2 + \sphericalangle 4$. Paralel doğrular arasında kalan ters açılardan, $\sphericalangle(1+3) + \sphericalangle(2+4) + 5 = 180°$ oludğunu görürüz. Esasında şekil üzerinde düşünürsek bu kadar laf etmeğe hiç gerek kalmaz.

Şimdi de diğer bir örnek ile

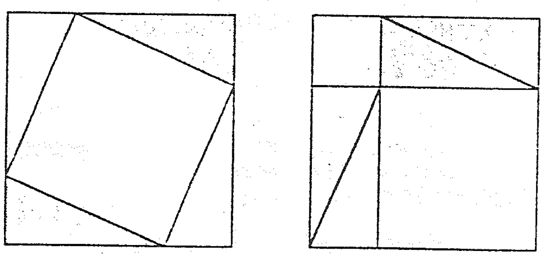
$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

eşitliğini kanıtlayalım. Sağ tarafını açarsak eşit olduklarını kolaylıkla görürüz. x^2 ifadesini kenarı x olan karenin alanı, ax ifadesini kenarları a ve x olan dikdörtgenin alanı olarak alıp, aşağıdaki BAŞ'ı düşünelim.



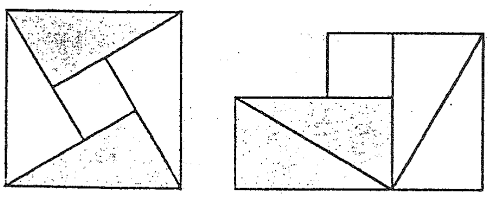
Görüldüğü gibi $x^2 + ax$, kenarı $x + \frac{a}{2}$ olan karenin alanı ile kenarı $\frac{a}{2}$ olan karenin alanları farkına eşit.

Matematik Dünyası'nda Pisagor teoreminin değişik kanıtları daha önce ele alınmıştı [4]. Aşağıdakilerden de Pisagor Teoreminin kanıtını görmek mümkün.

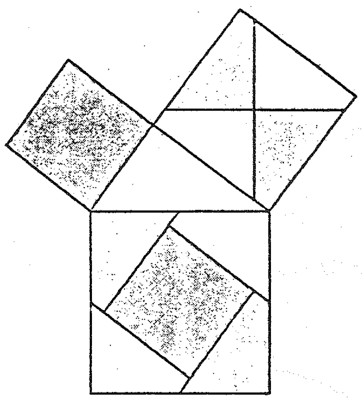


*ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

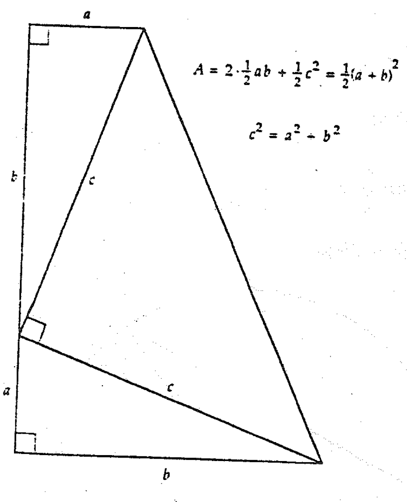
Yukarıdaki BAŞ'lar M.Ö. 200 senelerinden kalma. Aşağıdakiler ise yine Pisagor teoremini veriyor ve Hintli matematikçi Bhaskara'nın kanıtını özetliyor.



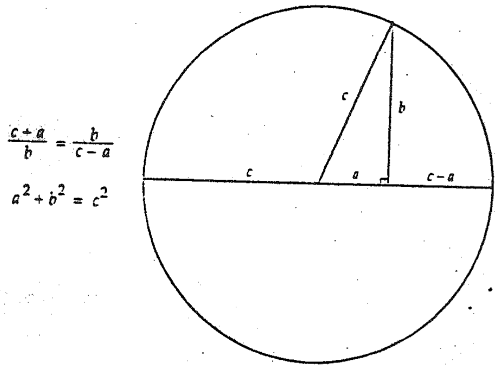
Bu BAŞ ise H. E. Dudeney'in verdiği Pisagor teoremi kanıtının özü ve 1917'de yapılmış.



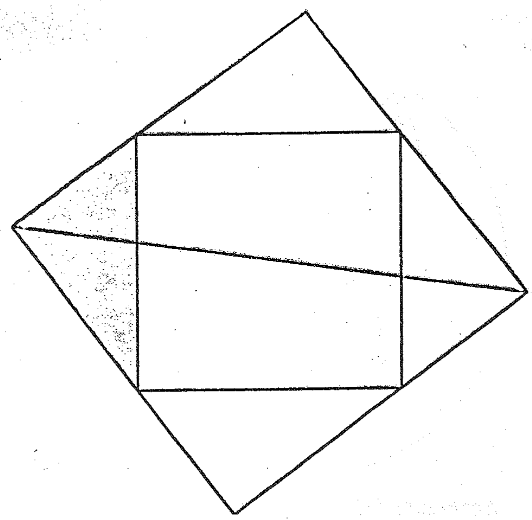
Aşağıdaki BAŞ ise Pisagor teoreminin 1876 yılında A.B.D. yirminci başkanı J. A. Garfield tarafından verilen kanıtının özü.



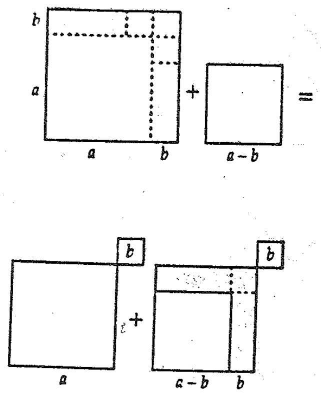
Pisagor teoremi ile ilgili son BAŞ ise M. Hardy'e ait.



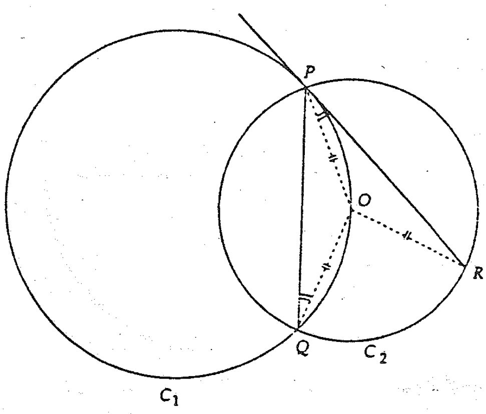
Aşağıdaki BAŞ ile bir dik üçgende dik açı açıortayının, kenarı hipotenüse eşit olan kareyi iki eşit parçaya böldüğünü gösterebiliriz.



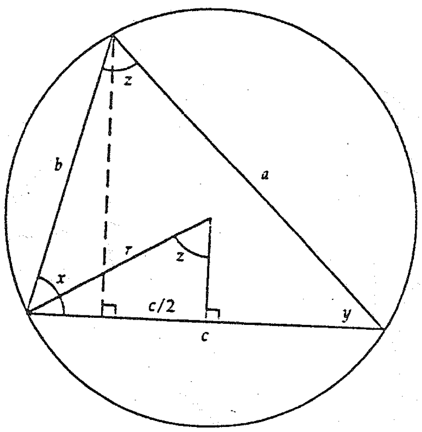
Şu BAŞ ise $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ ifadesini alanlar yardımı ile gösteriyor.



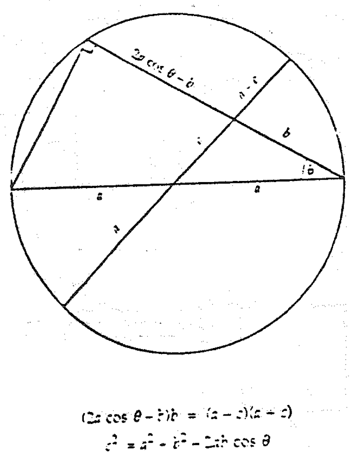
C_1 çemberi C_2 çemberinin merkezi O'dan geçsin. P noktasında C_1'e çizilen teğetin C_2'de kalan kısmı PR, ortak kiriş PQ'ya eşittir.



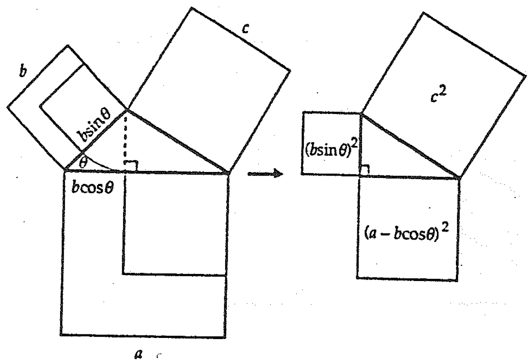
Bu BAŞ da iki açının toplamlarının sinüsünü veren $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ ile ilgili.



Aşağıdaki BAŞ ile kosinüs kuralını kanıtlayabiliriz.



Bu BAŞ da kosinüs kuralının kanıtını veriyor.



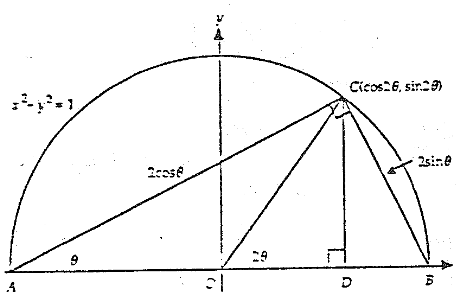
Aşağıdaki BAŞ'ta ACD ve ABC üçgenlerinin benzerliğini kullanarak

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

oranından $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, ve

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

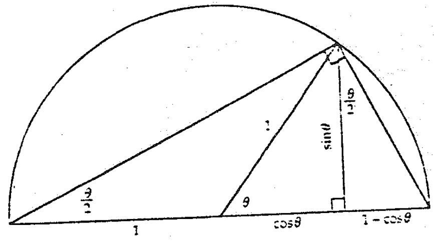
oranından $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ eşitliklerini kanıtlayabiliriz.



Bu BAŞ ile

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

eşitliğini görebiliriz.



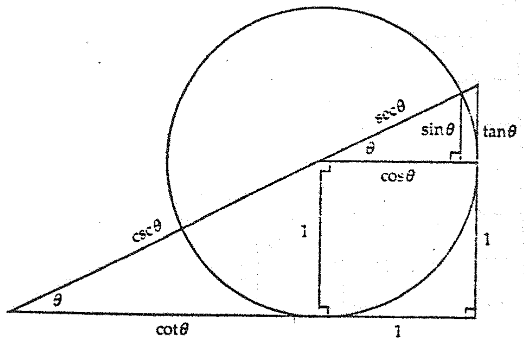
Bu BAŞ da

$$(\tan\theta + 1)^2 + (\cot t + 1)^2 = (\sec\theta + \csc\theta)^2$$

eşitliği ile $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ ve

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta + 1}{\cot\theta + 1}$$

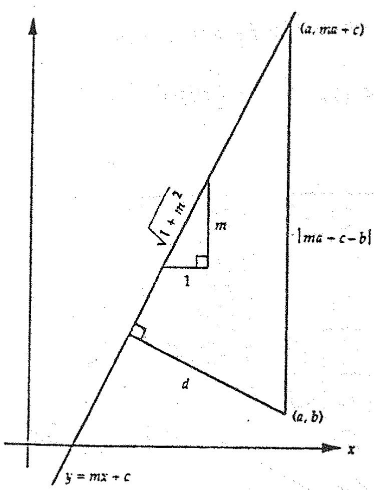
eşitliklerini göstermek için yararlı.



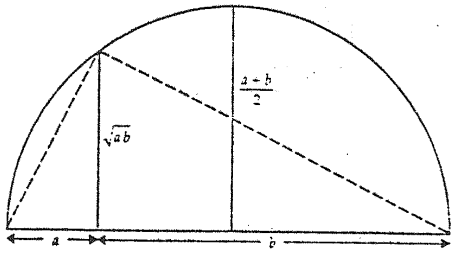
$y = mx + c$ doğrusunun dışında alınan (a, b) noktasının doğruya olan uzaklığı, (a, b) noktasından $mx + c$'ye inilen dikmenin uzunluğu olan d'dir. (a, b) ile $(a, ma + c)$ noktalarının arasındaki uzaklık $|ma + c - b|$ ile gösterilirse, üçgenler benzerliğinden

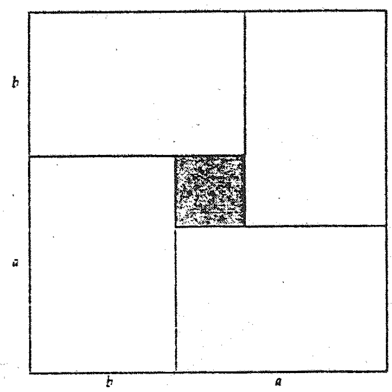
$$d = \frac{|ma + c - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

olduğunu gösteriniz.



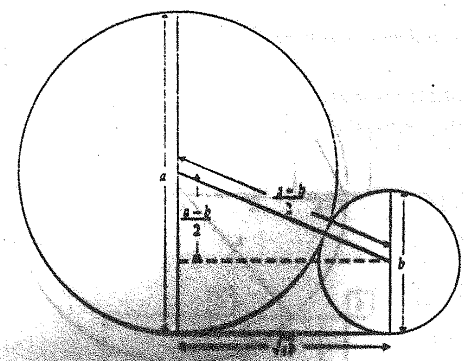
Pozitif a, b sayılarının geometrik ortalaması $\sqrt{ab}$, aritmetik ortalaması $\frac{a+b}{2}$ olarak tanımlanır. Aşağıdaki BAŞ'ların her biri $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ gösterir. En son BAŞ'ı kullanarak eşitlik için gerekli ve yeter koşulun $a = b$ olduğunu görebiliriz.



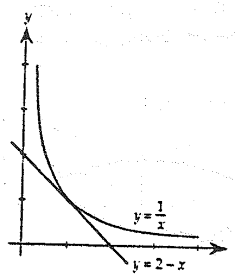


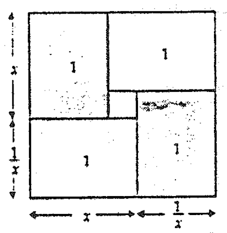
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

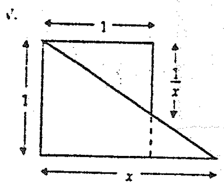
$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



Aşağıdaki BAŞ'ların her birinden $1 \leq x$ için $x + \frac{1}{x} \geq 2$ olduğunu anlayabiliriz.



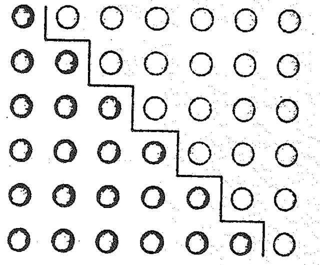




Bu BAŞ ise eski Yunanlılar'dan kalma ve

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

olduğunu anlamamazı sağlıyor. (Kesin kanıtı tümevarımla yaparız!)



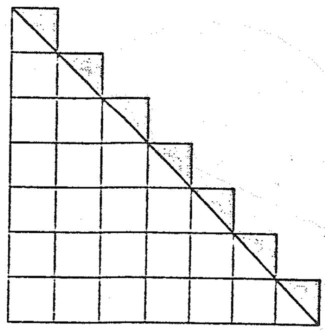
Aşağıdaki BAŞ lardan ilki yine

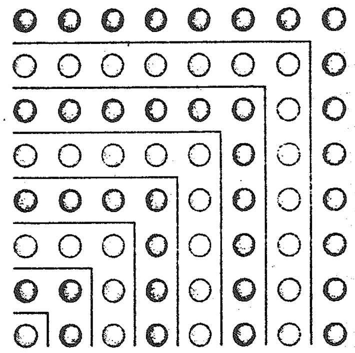
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

ile, ikincisi ise tek sayıların toplamını veren

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

formülü ile ilgili.

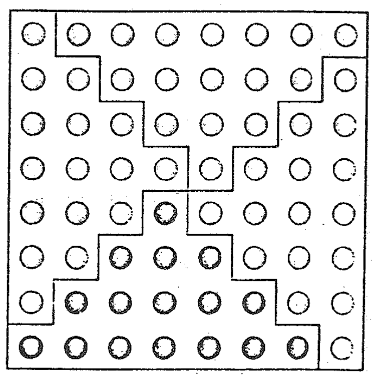




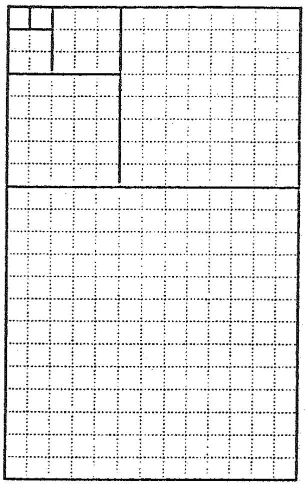
Aşağıdaki BAŞ da tek sayıların toplamı

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{1}{4}(2n)^2 = n^2$$

ile ilgili.

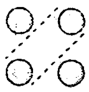


Aşağıdaki BAŞ Fibonacci sayılarının [1] karelerinin toplamı ile ilgili.

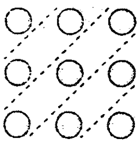


$$F_1 = F_2 = 1;\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

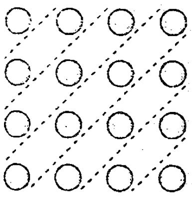
Şimdiki BAŞ tamsayıların toplamları ve kareleri ile ilgili.



$$1 + 2 + 1 = 2^2$$



$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$



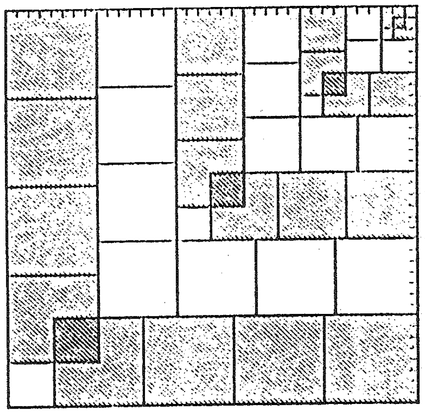
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n^2$$

Aşağıdaki BAŞ tamsayıların küplerinin toplamını veren

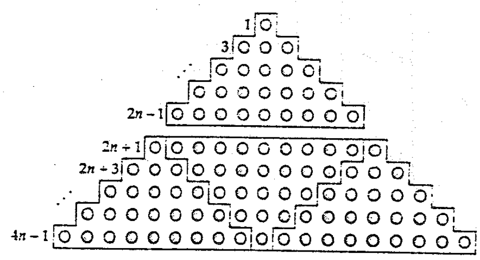
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$$

formülü ile ilgili.



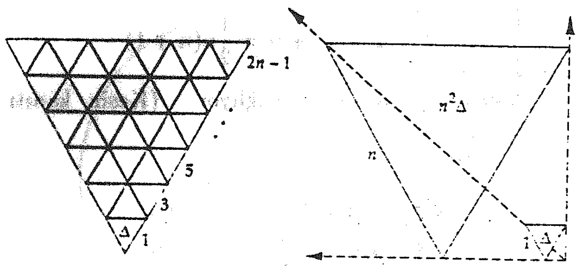
Aşağıdaki BAŞ Galileo tarafından 1615'te bulunmuş [2]. Tek sayı dizisinin özelliği ile ilgili.

$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots .$$



$$\frac{1 + 3 + \dots + (2n-1)}{(2n+1) + (2n+3) + \dots + (4n-1)} = \frac{1}{3}$$

Bu BAŞ'tan ise tek sayıların toplamı formülünü görebiliriz.



$$\Delta + 3\cdot\Delta + \dots + (2n-1)\cdot\Delta = A = n^2\cdot\Delta$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

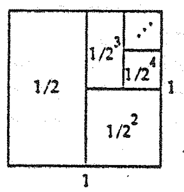
Bir sonraki BAŞ'tan

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1,$$

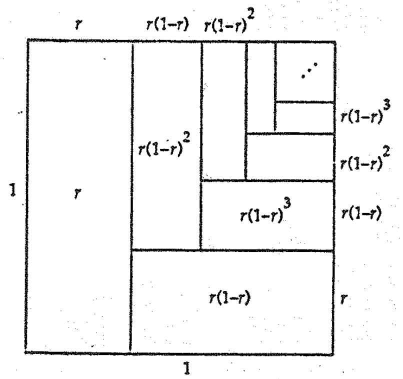
ikincisinden ise daha genel olan

$$r+(1-r)r+(1-r)^2r+\cdots=1$$

geometrik seri formüllerinin doğruluğunu görebiliriz.



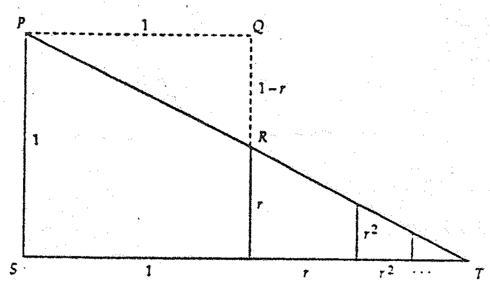
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$$



Son BAŞ'larımız ise geometrik serilerin toplamı ile ilgili. İlk BAŞ'ta geometrik serilerin toplamını veren

$$1+r+r^2+\cdots=\frac{1}{1-r}$$

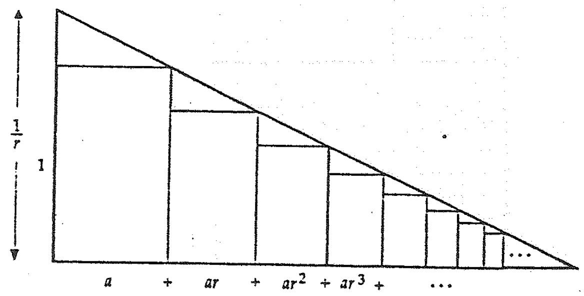
formülü, PQR ve TSP üçgenlerinin benzerliği kullanılarak elde ediliyor.



Yine bir geometrik seri toplamı olan

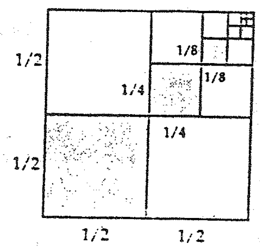
$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=\frac{a}{1-r}$$

nin doğruluğunu aşağıdaki BAŞ'tan kolayca görebilirsiniz.

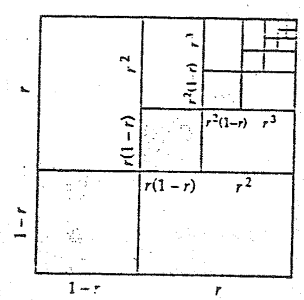


$$\frac{a+ar+ar^2+ar^3+\cdots}{1/r}=\frac{ar}{1-r}$$

Aşağıdaki BAŞ'lar da geometrik serilerin toplamları ile ilgili.



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{1}{3}$$



$$(1-r)^2+r^2(1-r)^2+r^4(1-r)^2+\ldots=\frac{(1-r)^2}{(1-r)^2+2r(1-r)}=\frac{1-r}{1+r}$$

$$1+r^2+r^4+\ldots=\frac{1}{1-r^2}$$

$$a+ar+ar^2+\ldots=\frac{a}{1-r}$$