# BİR TEKHÜCRELİNİN SOYUNU SONSUZA DEĞİN SÜRDÜREBİLME ŞANSI

Ali Nesin *

İkiye bölünerek üreyen tekhücreliler vardır. Tek hücreli ve tek cinslidirler. Yoksa her tekhücreli mi ikiye bölünerek ürer? Unutmuşum. Kimseye gereksinmeden ikiye bölünerek üreyen bir yaratık düşünelim. Örneğin amip. Aklımda yanlış kalmadıysa amip ikiye bölünerek ürer; aklımda yanlış kaldıysa da önemi yok; amipin ikiye bölünerek ürediğini varsayalım bu yazılık. Kimi amipler çeşitli nedenlerden ikiye bölünemeden, yani üreyemeden ölürler. Amiplerin $p$ olasılıkla ikiye bölündüklerini, $1-p$ olasılıkla öldüklerini varsayalım. Burda $p$, 0'la 1 arasında bir sayıdır. Eğer $p = 0$ ise bütün amipler üreyemeden ölürler. Eğer $p = 1$ ise, bütün amipler ürerler, herbiri ikiye bölünür. Eğer $p = 1/2$ ise, bir amip üremek ve ölmek arasında karar vermek için yazıtura atar, örneğin yazı gelirse ürer, tura gelirse ölür. Eğer $p = 1/6$ ise, bir amip üremekle ölmek arasında karar vermek için zar atar, örneğin şeş gelirse ürer, yoksa ölür.

$p$'nin değeri deneyle bulunur. Bu yazıda önce $p$'nin deneyle nasıl bulunduğunu göreceğiz. Bu oldukça kolaydır. Arkasından, tek bir amipin soyunu sonsuza dek sürdürebilme şansının sıfırdan büyük olması için $p$'nin en çok kaç olması gerektiğini bulacağız. Eğer $p$ olasılığı 0'a yakınsa, yani amipler büyük bir olasılıkla üreyemeden ölüyorlarsa, tek bir amipin soyunu sonsuza dek sürdürebilmesi oldukça küçük bir olasılık olmalı; sıfır bile olabilir bu olasılık. Örneğin $p = 0$'sa, amip kaçınılmaz olarak ölecektir, soyu bir kuşak bile sürmeyecektir. Eğer $p = 0.001$ ise, amip binde bir olasılıkla bir kuşak üreyebilecektir; çok küçük bir olasılıkla bile olsa, soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olabilir; belki de hiç öyle bir şansı yoktur ... Hesapsız kitapsız belli mi olur? Öte yandan, $p$ bire yakınsa, amipin soyunu sonsuza dek sürdürme olasılığı sıfırdan büyük bir sayı olabilir. Bu sorunun yanıtını bulduktan sonra sorularımızı çoğaltacağız.

## Deneyle $p$'yi Bulmak

Bir amipin üremesi ya da ölmesi için doğumundan sonra bir saate gereksindiğini varsayalım. Çok sayıda yeni doğmuş amip, diyelim 1 milyon tane, bir saat boyunca büyükçe bir kavanozda bekletilir. Kavanoz büyük olmalı ki, yer yokluğu amiplerin rahat rahat üremelerini engellemesin. Bir saat sonra kavanoz açılır ve kavanozdaki amipler sayılır. Bu sayı 0'la 2 milyon arasında değişen bir sayı olmalıdır elbet. Eğer bir saat sonra kavanozdan hiç amip çıkmamışsa, amipler hep ölüyor, hiç üremiyorlar demektir, yani $p = 0$'dır. Yeryüzünde amip olduğundan, deney sonucunda gerçekten $p = 0$ bulmuşsak deneyde bir hata yapmışız demektir. Eğer 2 milyon amip çıkmışsa, o zaman hiç amip ölmemiş, hepsi üremiş demektir, dolayısıyla $p = 1$'dir. Eğer kavanozdan gene 1 milyon amip çıkmışsa, o zaman amiplerin yarısı (500 bini) ölmüştür, öbür yarısı üremiştir, yani $p = 1/2$'dir.

Matematiksel olarak $p$'yi nasıl buluruz? 1 milyon amipin bir saat sonra $N$ tane olduğunu varsayalım. $N$'yi biliyoruz, $p$'yi bulmaya çalışıyoruz. Bu 1 milyon (yani $10^6$) amipin $p \times 10^6$ tanesi üremiştir. Aşağı yukarı elbet ... Kavanoza başlangıçta ne denli çok amip koyarsak, gerçek $p$'ye o denli yaklaşırız. Geriye kalan $(1-p) \times 10^6$ amip ölmüştür. Yani kavanozda bir saat sonra $2 \times p \times 10^6$ amip olmalıdır. Demek ki, $N = 2 \times p \times 10^6$ eşitliği geçerlidir. Bundan da, $p = N/(2 \times 10^6)$ eşitliğini buluruz.

Genel olarak, kavanoza başlangıçta $M$ amip koymuşsak ve bir saat sonra kavanozda $N$ amip bulmuşsak, o zaman $p = N/2M$'dir.

Birinci soruyu yanıtladık. İkinci soruya geçelim. İkinci soruyu yanıtlamak biraz daha zor.

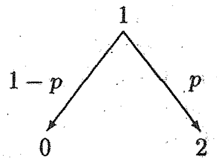
## Bir Amipin Soyunu Sonsuza Dek Sürdürme Olasılığı

Tek bir amipin soyunu sonsuza dek *sür-*

* California Üniversitesi (Irvine) Matematik Bölümü öğretim üyesi

*dürememe* olasılığına $x$ diyelim. $x$'i hesaplamak istiyoruz. Amiplerin birbirlerinden bağımsız ürediğini varsayacağız, örneğin amiplerin çok üreyip, yer ve yemek için birbirleriyle kavga etmeyeceklerini varsayacağız. Ayrıca şunu da belirtmekte yarar var: Eğer tek bir amipin soyunun sonsuza dek sürme olasılığı sıfırsa, sonlu tane amip için de bu olasılık sıfırdır.

Evet ... Tek bir amipimiz var. Bir saat sonra bu amip $1-p$ olasılıkla ölecektir. Demek ki $x$ en azından $1-p$ olmalıdır. Amip $p$ olasılıkla ikiye bölünüp 2 amip olacaktır. Bir resim yapalım.




amipimiz yukarıdaki şeklin en üst noktası. Bir saat sonra, amip $1-p$ olasılıkla sol oku seçecek ve ölecek, $p$ olasılıkla sağ oku seçecek ve birken iki olacak. Sol oku izlerse, soy daha ilk kuşaktan tükenir. Sağ oku izlerse, ikinci kuşakta iki amip oluşur. Bu iki amipin herbiri de bir saat sonra ya ölecek ya üreyecektir. Her ikisi birden ölebilir, salt biri ölebilir, her ikisi birden üreyebilir. Yani birinci amipimizin soyunun kuruması için, birinci amip

(1) *ya* sol oku izleyip ölmeli,

(2) *ya da* sağ oku izlemeli *ve* oluşan ikinci kuşak amiplerin her ikisinin de soyu kurumalı.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x = {} & \text{Sol oku izleme olasılığı} \\ & + (\text{sağ oku izleme olasılığı}) \times (\text{iki amipin} \\ & \qquad \text{soylarının kuruma olasılığı}) \end{aligned}$$

denklemi geçerlidir. Sol oku izleme olasılığının $1-p$, sağ oku izleme olasılığının $p$ olduğunu biliyoruz. Demek ki

$$x = (1-p) + p\,(\text{iki amipin soylarının kuruma olasılığı})$$

eşitliğini bulduk.

Eğer tek bir amipin soyunun kuruma olasılığı $x$ ise, her iki amipin de soyunun kuruma olasılığı $x^2$'dir[1]. Demek ki

$$x = (1-p) + px^2$$

eşitliği geçerlidir. Bu ikinci dereceden bir denklemdir. Kolaylıkla çözülür ve iki çözüm bulunur:

$$\text{ya} \quad x = 1 \quad \text{ya da} \quad x = \frac{1-p}{p}.$$

Demek ki $x$ ya 1'e ya da $(1-p)/p$'ye eşit. Her ikisine birden eşit olamaz elbet. Yalnızca $p = 1/2$ ise her ikisine birden eşit olabilir. Doğru yanıt hangisidir? 1 mi, yoksa $(1-p)/p$ mi? Belki kimi zaman 1'dir, kimi zaman $(1-p)/p$.

## Hangi Yanıt Doğru?

$x$'in en fazla 1 olabileceğini biliyoruz. Çünkü $x$ bir olasılıktır ve olasılıklar 0'la 1 arasında değişirler. Dolayısıyla eğer $(1-p)/p$ sayısı 1'den büyükse, ikinci yanıt doğru olamaz, birinci yanıt doğru olmalı, yani $x = 1$ olmalı. Kolay bir hesap, eğer $p < 1/2$'yse, $(1-p)/p > 1$ verir. Demek ki $p$, 1/2'den küçük olduğunda $x = 1$'dir, yani amipin soyu kesinlikle sonlu bir zaman sonra tükenir. Sezgimiz de bunu söylemiyor mu zaten? Sezgimiz, $p$ küçükse, amipin soyunu sonsuza dek sürdürmeme olasılığının büyük olduğunu, yani 1'e yakın olduğunu söylüyor. Demek ki bu olasılık 1'miş.

Peki, $1/2 \le p$ ise, $x$ kaç olmalı? Bu soruyu yanıtlamak biraz daha zor. Çözümlememizi derinleştirmemiz gerekiyor. Bundan böyle $1/2 \le p$ varsayımını yapacağız. O zaman,

$$\frac{1-p}{p} \le 1 \tag{1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Yukarıda amipin bir saatte öldüğünü ya da ürediğini varsaymıştık. Açıklamalarımızı kolaylaştırması amacıyla, aynı varsayımı sürdürelim. *En fazla* $n$ saat sonra hiç amip *kalmama* olasılığına $x_n$ diyelim. Yani $x_n$, $n$'yinci kuşak amip yetişmeme olasılığı, amip soyunun birinci, ikinci, ..., $n$'yinci kuşakta ölme olasılığı. Örneğin,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1-p, \\ x_2 &= (1-p) + p(1-p)^2 \end{aligned}$$

dir.

[1] Örneğin bir zar atıldığında şeş gelme olasılığı $1/6$'dır. İki zar atıldığında, her ikisinin de şeş gelme olasılığı $1/36$'dır, yani $(1/6)^2$'dir.

Biraz düşününce, $x$'in $x_n$'lerin limiti olduğunu anlarız ($n$ sonsuza gittiğinde). Çünkü $x_n$, $n$ kuşak amip yetişmeme olasılığıdır, $x$ de sonsuzda amip kalmama olasılığıdır. Yani,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad (2)$$

eşitliği geçerlidir.

Doğru yanıtı bulmak için üçüncü bir olguya daha gereksiniyoruz. O da şu: $1/2 \le p$ ise,

$$x_n \le \frac{1-p}{p}. \qquad (3)$$

Bu eşitsizliği $n$ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $x_1 = 1-p$ olduğundan, (3) eşitsizliği $n=1$ için geçerlidir. Şimdi (3)'ün $n$ için geçerli olduğunu varsayıp (3)'ü $n+1$ için kanıtlayalım. Ancak bunu yapabilmemiz için, $x_n$'yle $x_{n+1}$ arasında cebirsel bir ilişki bulmalıyız, yoksa $x_n$ üzerine bildiğimiz bir bilgiden $x_{n+1}$ üzerine bir bilgi çıkaramayız.

Nasıl yukarıda $x = (1-p)+px^2$ eşitliğini bulmuşsak, tamamıyla aynı yöntemle,

$$x_{n+1} = (1-p) + px_n^2 \qquad (4)$$

eşitliği bulunur. Artık işimiz iş. (4)'ü ve tümevarım varsayımı olan (3) eşitsizliğini kullanarak, $x_{n+1} \le (1-p)/p$ eşitsizliğini kanıtlayabiliriz:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\overset{(4)}{=} (1-p)+px_n^2 \\ &\le (1-p)+p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \\ &= (1-p)+\frac{(1-p)^2}{p} = \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

(3) eşitsizliği kanıtlanmıştır.

Şimdi doğru yanıtı bulabiliriz: Eğer $1/2 \le p$ ise,

$$x \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} x_n \overset{(3)}{\le} \frac{1-p}{p} \overset{(1)}{\le} 1.$$

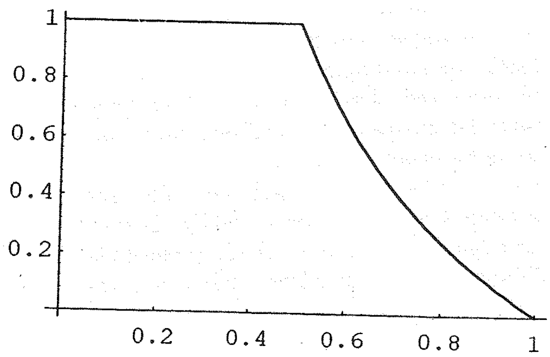
Demek ki $x \le \frac{1-p}{p} \le 1$. Bu son eşitsizliklerden, eğer $1/2 \le p$ ise, $x$'in $(1-p)/p$ olduğu anlaşılır.

Sonuç olarak,

$$x = \begin{cases} 1, & \text{eğer } 0 \le p \le 1/2 \text{ ise;} \\ \frac{1-p}{p}, & \text{eğer } 1/2 \le p \le 1 \text{ ise;} \end{cases}$$

sonucunu bulduk. Yani amipin soyunu sonsuza değin sürdürebilme olasılığının 0 olmaması için, $p$, 1/2'den büyük olmalıdır.

$x$, $p$'ye bağlı bir göndermedir (fonksiyondur) elbet. İşte bu göndermenin grafiği:




## Yeni Problem

Bu kez yaratığımız $p$ olasılıkla *üçe* bölünsün, $1-p$ olasılıkla ölsün. Üçe bölünen bir yaratığın gerçekten olup olmadığı sorusuyla ilgilenmeyelim. $p$ olasılıkla üçe bölünen varsayımsal yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olması için $p$ kaç olmalıdır? Okur, yazının süreğini okumadan önce bu soruyu kendi kendine yanıtlamaya çalışmalıdır.

Yaratık bu kez iki yerine üçe bölündüğünden, yaratığın sonsuza dek soyunu sürdürebilme olasılığı daha yüksek olmalıdır.

Az önce çözdüğümüz problem gibi çözülür bu problem de. Ancak hesaplar biraz daha karmaşıktır. Bu kez, $x = (1-p)+px^2$ denklemi yerine,

$$x = (1-p)+px^3$$

denklemini elde ederiz. Eğer $p=0$ ise, bir sorun yok: $x = 1$'dir. Bundan böyle $p$'nin 0 olmadığını varsayalım. O zaman yukarıdaki denklem, üçüncü dereceden bir denklemdir ve çözmesi ikinci dereceden denklemden biraz daha zordur. Ancak $x=1$ bir çözüm olduğundan, $px^3 - x + (1-p)$ polinomu $x-1$ polinomuna bölünür. Bölme yapıldığında,

$$px^3 - x + (1-p) = p(x-1)\left(x^2 + x - \frac{1-p}{p}\right)$$

elde edilir. Bundan da (1)'in bütün çözümleri bulunur:

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ x &= \frac{-1+\sqrt{\frac{4-3p}{p}}}{2}, \\ x &= \frac{-1-\sqrt{\frac{4-3p}{p}}}{2}. \end{aligned}$$

Üçüncü çözüm her $p$ için negatif bir sayı verdiğinden problemimizin yasal bir çözümü olarak kabul edilemez. Ayrıca $p < 1/3$ olduğunda, ikinci çözüm 1'den büyüktür ve dolayısıyla bu şıkta o çözüm de yasal bir çözüm değildir. Demek ki $p < 1/3$ olduğunda $x = 1$'dir. Ama $p \geq 1/3$ olduğunda, doğru yanıt birinci eşitlik de olabilir, ikincisi de. Hangisi?

Bundan böyle $p \geq 1/3$ eşitsizliğini varsayalım. $x_n$, ilk problemde tanımlanan olasılıklar olsun. Yukarıda da gösterdiğimiz gibi, $x$, $x_n$'lerin sonsuzda limitidir.

$a$ ikinci seçenek olsun, yani

$$a = \frac{-1+\sqrt{\frac{4-3p}{p}}}{2}$$

olsun. $a \leq 1$ eşitsizliğini biliyoruz, bilmiyorsak da kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Ayrıca

$$a^2 + a - \frac{1-p}{p} = 0$$

eşitliğini biliyoruz. Bu ve $x_{n+1} = (1-p) + px_n^3$ eşitliği kullanılarak, tümevarımla $x_n \leq a$ eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanabilir.

Şimdi

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \leq a \leq 1$$

elde ederiz. Demek ki $p \geq 1/3$ ise, $x = a$'dir.

## Bir Problem Daha

Şimdi yaratığın $p_o$ olasılıkla öldüğünü, $p_1$ olasılıkla ne öldüğünü ne de bölündüğünü, $p_2$ olasılıkla ikiye bölündüğünü ve $p_3$ olasılıkla üçe bölündüğünü varsayalım. Bu tuhaf yaratığın bu dört seçenekten başka seçeneği olmasın. Demek ki $p_o+p_1+p_2+p_3 = 1$ eşitliği geçerlidir. Yaratığın soyunun sonlu bir zaman sonra kuruma olasılığını ($x$'i) hesaplayın. Hesaplar biraz daha karmaşık olsa da yukarıdaki yöntem sonucu veriyor. Şu sonucun bulunması gerekiyor: Eğer $p_3 \neq 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1, & \text{eğer } p_o \geq 2p_3 + p_2 \text{ ise;} \\ \dfrac{-p_2 - p_3 + \sqrt{(p_2+p_3)^2 + 4p_op_3}}{2p_3}, & \text{eğer } p_o \leq 2p_3 + p_2 \text{ ise.} \end{cases}$$

Eğer $p_3 = 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1, & \text{eğer } p_o \geq p_2 \text{ ise;} \\ p_o/p_2, & \text{eğer } p_o < p_2 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu konuda daha geniş bilgiyi aşağıdaki yapıtlarda bulabilirsiniz. Eğer erkek ve dişi gerektiren iki cinsli üremelerle ilgilenirseniz, [2]'yi öneririm.

KAYNAKÇA

[1] W. Feller, *Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 1. cilt, 3. basım, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[2] D. M. Hull, *How Many Mating Units Are Needed to Have a Positive Probability of Survival?*, *Mathematics Magazine*, **66**, 28-33 (1993).

[3] S. M. Ulam, *How to Formulate Mathematically Problems of Rate of Evolution*, *Mathematical Challenges to the Neo-Darwinian Interpretation of Evolution*, 25–26, Wistar Institute, Philadelphia, 1967.