BİR EŞİTSİZLİK ÜZERİNE

Emre Alkan *

Bu yazıda bir eşitsizliğin gösterilmesi için bir yol önereceğiz. Eşitsizliği genel halde gösterememize karşın, eşitsizliğin bazı hallerde doğru olduğunu göstereceğiz.

İddia. *x, y, z ve n pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\frac{1}{(x+y)^n}+\frac{1}{(x+z)^n}+\frac{1}{(y+z)^n}\leq\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)$$

eşitsizliği doğrudur. Eşitlik yalnız $x=y=z$ iken vardır.

Çözüm. Önce $n=2$ için,

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$$

olduğunu gösterelim.

Bir ABC üçgeninin kenarları a, b, c, yükseklikleri h_a, h_b, h_c, içaçıortayları n_a, n_b, n_c ve yarıçevresi u olsun. Ayrıca $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ dışteğet çember yarıçaplarını göstersin.

$$n_a^2+n_b^2+n_c^2=(a+b+c)\cdot\left[\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2}+\frac{ac(a+c-b)}{(a+c)^2}+\frac{bc(b+c-a)}{(b+c)^2}\right]$$

ile

$$\frac{ab}{(a+b)^2}\leq\frac{1}{4},\quad\frac{ac}{(a+c)^2}\leq\frac{1}{4},\quad\frac{bc}{(b+c)^2}\leq\frac{1}{4}$$

olduğu kullanılırsa, $n_a^2+n_b^2+n_c^2\leq u^2$ elde edilir. Buradan kolayca $h_a^2+h_b^2+h_c^2\leq u^2$ olduğu söylenebilir. Öte yandan,

$$u^2=\Gamma_a\Gamma_b+\Gamma_a\Gamma_c+\Gamma_b\Gamma_c\leq\Gamma_a^2+\Gamma_b^2+\Gamma_c^2$$

ve sonuç olarak $h_a^2+h_b^2+h_c^2\leq\Gamma_a^2+\Gamma_b^2+\Gamma_c^2$ elde ederiz. S üçgen alanı olmak üzere, $2S=a\,h_a$, $S=(u-a)\Gamma_a$ ve diğer ilişkiler de benzer şekilde yazılırsa, son eşitsizlik

$$4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\leq\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}$$

halini alır. Bu ise

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{(a+b-c)^2}+\frac{1}{(a+c-b)^2}+\frac{1}{(b+c-a)^2}$$

eşitsizliğine denktir. $a+b-c=x$, $a+c-b=y$ ve $b+c-a=z$ alırsak, x, y, z sayıları pozitif olmak dışında bir özellik taşımazlar. Böylece

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$$

olur. Eşitlik yalnız üçgen eşkenarken ve böylece yalnız $x=y=z$ iken vardır.

Şimdi de $n=1$ için

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

eşitsizliğine bakalım. Buna iki çözüm önereceğiz.

Çözüm 1. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra eşitsizliğin

$$2xyz(xy+xz+yz)\leq x^2y^2(x+y)+x^2z^2(x+z)+y^2z^2(y+z)$$

şeklini aldığı görülebilir. Sağ tarafa bakarsak, $x^3y^2+x^3z^2\geq 2x^3yz$ olduğunu gözönüne alır, diğerleri için de aynı işi yaparsak,

$$x^2y^2(x+y)+x^2z^2(x+z)+y^2z^2(y+z)\geq 2xyz(x^2+y^2+z^2)\geq 2xyz(xy+xz+yz)$$

elde ederiz.

Çözüm 2. Yine bir ABC üçgeninden yararlanacağız. Öncelikle

$$h_a+h_b+h_c\leq u\sqrt{3}\leq\Gamma_a+\Gamma_b+\Gamma_c$$

eşitsizliklerini gösterelim. Γ içteğet çember yarıçapı ise,

$$h_a+h_b+h_c=2u\left(\frac{\Gamma}{a}+\frac{\Gamma}{b}+\frac{\Gamma}{c}\right)$$

yazılabilir. $\frac{a}{\Gamma}=\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ ve diğerleri de benzer şekilde yazılırsa, sol tarafı görmek için,

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

$$(*)\quad \left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^{-1}+\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)^{-1}+\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)^{-1}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

olduğunu görmeliyiz. Biz bu denklemin sol tarafının (yani $(*)$'ın) $A=B=C$ iken maksimum olduğunu göstereceğiz. Sol taraf

$$\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

şeklinde yazılabilir. A açısını sabit tuttuğumuzda $\frac{B+C}{2}$ de sabittir. $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$'nin $B=C$ iken maksimum olacağını görmek kolaydır. Şimdi

$$\sin\frac{A}{2}\left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\right)$$

ifadesine bakalım. Bu ifadenin de $B=C$ iken maksimum olduğunu göstereceğiz. Bir α sabiti için $\frac{B}{2}=x$ ve $\frac{C}{2}=\alpha-x$ alalım.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{\cos(\alpha-x)}+\frac{\sin(\alpha-x)}{\cos x},\\ g(x) &= \frac{\sin x}{\cos(\alpha-x)} \end{aligned}$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)+g(\alpha-x),\\ f'(x) &= g'(x)-g'(\alpha-x),\\ f''(x) &= g''(x)+g''(\alpha-x) \end{aligned}$$

ile $f'(\frac{\alpha}{2})=0$ ve $f''(\frac{\alpha}{2})=2g''(\frac{\alpha}{2})$ olur. Eğer $g''(\frac{\alpha}{2})<0$ olduğunu gösterirsek, $x=\frac{\alpha}{2}$, f'nin bir maksimum noktasıdır.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos\alpha}{\cos^2(\alpha-x)},\\ g''(x) &= -2\cos\alpha\frac{\sin(\alpha-x)}{\cos^3(\alpha-x)}\\ g''\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= -2\cos\alpha\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}}\qquad\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

olduğundan $g''(\frac{\alpha}{2})<0$ gerçeklenir.

A,B,C açıları simetrik olduklarından, $(*)$ ifadesi $A=B=C$ iken maksimum olur. Böylelikle $h_a+h_b+h_c\leq u\sqrt{3}$ olduğunu gösterdik. $u\sqrt{3}\leq\Gamma_a+\Gamma_b+\Gamma_c$ eşitsizliğine bakalım.

$$\Gamma_a+\Gamma_b+\Gamma_c=u\left(\frac{\Gamma}{v-a}+\frac{\Gamma}{v-b}+\frac{\Gamma}{v-c}\right)$$

yazılırsa, eşitsizlik

$$\sqrt{3}\leq\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$$

halini alır. Bunu okuyucuya bırakacağız

$$h_a+h_b+h_c\leq\Gamma_a+\Gamma_b+\Gamma_c,\ 2S=a\,h_a,$$

$S=(u-a)\Gamma_a$ ve diğerleri de yazılırsa, sonra da $x=a+b-c$, $y=a+c-b$ ve $z=b+c-a$ alınırsa, eşitsizliğin $n=1$ hali gösterilmiş olunur.

Bu yaptıklarımızdan sonra aşağıdaki teoremin ispatı çok açıktır.

Teorem. *x,y,z ve n pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\frac{1}{(x+y)^n}+\frac{1}{(x+z)^n}+\frac{1}{(y+z)^n}\leq\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}\right)$$

ile

$$h_a^n+h_b^n+h_c^n\leq\Gamma_a^n+\Gamma_b^n+\Gamma_c^n$$

eşitsizlikleri eşdeğerdir.

Şu halde iddiayı gösterebilmek için $n>0$ iken

$$h_a^n+h_b^n+h_c^n\leq\Gamma_a^n+\Gamma_b^n+\Gamma_c^n$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunu gösterebilmek için, eşitsizliğin $n=1$ ve $n=2$ hallerinden esinlenerek akla gelen bir yol

$$h_a^n+h_b^n+h_c^n\leq\frac{u^n}{(\sqrt{3})^{n-2}}\leq\Gamma_a^n+\Gamma_b^n+\Gamma_c^n$$

olduğunu göstermeye çalışmaktır. Sağ tarafı göstermek mümkün olsa bile, sol taraftaki eşitsizlik her zaman doğru değildir. Dik kenarları 1 birim olan bir ikizkenar dik üçgen alalım. Kolayca $h_a^n+h_b^n+h_c^n=2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ ve $u^n=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ yazılabilir. Fakat

$$2(\sqrt{3})^{n-2}+(\sqrt{3})^{n-2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\leq\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

eşitsizliğinin her $n>0$ için doğru olmadığı açık.

Yazıyı ilginç bir eşitsizlikle bitirelim.

$$\frac{\Gamma_a}{h_a}+\frac{\Gamma_b}{h_b}+\frac{\Gamma_c}{h_c}\geq 3$$

olduğunu görelim.

$$\frac{\Gamma_a}{h_a}+\frac{\Gamma_b}{h_b}+\frac{\Gamma_c}{h_c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c}{h_ah_bh_c}}$$

kolayca elde edilir. S üçgen alanı, R ve r çevrel ve içteğet çember yarıçapları ise,

$$\Gamma\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c=S^2=\frac{1}{2}Rh_ah_bh_c$$

olduğu görülebilir. $R\geq 2r$ olduğundan dolayı, $h_ah_bh_c\leq\Gamma_a\Gamma_b\Gamma_c$ ve istenen eşitsizlik elde edilir.