FERMAT'NIN SON TEOREMİ HAKKINDA

Mehmet Yüce * † (Babası: Türkoloji Bölüm Başk. Prof. Dr. Nuri Yüce)

Tamsayılar kümesini $\mathbb{Z}$ ile gösterelim ve $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ yazalım. n artı bir tamsayı olmak üzere,

$$A_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^n = y^n + z^n\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : xyz = 0\}$$

yazarsak, Pierre de Fermat'nın (1601–1665) *Fermat'nın Son Teoremi* olarak şöhret kazanan tahmini,

$$A_n \subseteq B \qquad (n \geq 3)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu tahminin doğru olup olmadığı meselesi matematikçileri uzun zamandır meşgul etmekteydi. Bugün ise alanın uzmanlarının genel kanısı, İngiliz matematikçisi Andrew Wiles'ın ancak ana hatlarıyla kamuoyunun bilgisi dahilinde olan çalışmaları neticesinde, bu "teorem"in bir ispatına ulaşıldığı yönündedir.

$\xi = (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ gibi bir sıralı tamsayı üçlüsü ve bir $a \in \mathbb{Z}$ verildiğinde, (ax, ay, az) üçlüsünü $a\xi$ ile gösterelim. $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$ verildiğinde $\xi = a\zeta$ ve $\eta = b\zeta$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ve $\zeta \in \mathbb{Z}^3$ bulunabiliyorsa, ξ, η sıralı üçlülerine birbirlerine *bağımlı*, aksi takdirde birbirlerinden *bağımsız* diyelim. Eğer $\xi, \eta \in \mathbb{Z}^3$ birbirlerinde bağımlı ve $\xi \in A_n$ ise, $\eta \in A_n$ olacağı aşikârdır. Bu yüzden $M \subseteq \mathbb{Z}^3$, içinde birbirinden bağımsız sonsuz tane üçlü bulunduran bir kümeyse, Fermat'nın Son Teoremi'nde ele alınan denklemlerin çözümlerinden ancak aşikâr olanlarının M içinde bulunacağının kanıtı önem kazanacaktır. Bu yazının amacı da bu yönde aşağıdaki teoremde verilen küçük bir neticeye işaret etmek olacaktır.

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2 = y^2 + z^2,\ x,y,z \geq 1\}$$

yazalım. P, *Pisagor üçlüleri* olarak adlandırabileceğimiz üçlülerden, yani kenar uzunlukları tamsayı olan dik üçgenlerde sırayla hipotenüs ve dik kenar uzunluklarını gösteren tamsayılardan meydana gelmiştir. P'nin içinde birbirinden bağımsız sonsuz üçlü olduğu bilinmektedir.

Teorem. *$n \geq 3$ ise, $A_n \cap P \subseteq B$'dir.*

Kanıt. $x, y, z \geq 0$ tamsayıları için $x^n = y^n + z^n$ ve $x^2 = y^2 + z^2$ sağlanıyorsa, ikinci denklemin sırayla x^{n-2}, y^{n-2}, z^{n-2} ile çarpılıp x^n, y^n, z^n'nin çekilmesi ve bulunanların ilk denklemde yerine konulmasıyla

$$(x^{n-2}y^2 - y^{n-2}x^2) + (x^{n-2}z^2 - x^2z^{n-2}) + (y^{n-2}z^2 + z^{n-2}y^2) = 0$$

elde edilir ki $x, y, z \geq 0$ ile $x \geq y$ ve $x \geq z$ olduğundan, bu ancak yuvarlak parantezler içindeki üç miktarın her birinin sıfıra eşit olmasıyla mümkündür. Bu halde x, y ve z'den en az biri sıfır olmalıdır.

---

* Şişli Terakki Lisesi 1. sınıf öğrencisi

† Bu çalışma sırasında benden yardım ve teşviklerini esirgemeyen Şişli Terakki Lisesi öğretmenlerinden Neşe Yedikardeş ve Remzi Erkovan ile İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü mensuplarından Hülya Şenkon ve Mehmet Oryan'a teşekkürü bir borç bilirim.