Bu seminerlerle ilgili daha ayrıntılı bilgi Nisan 1995 sayımızda verilmişti. Şimdi sadece, TÜBİTAK, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu, Atatürk Bulvarı, No: 221, Kavaklıdere, Ankara adresinde saat 15:00'te yapıldığını ve mektupla ya da telefonla (Telefon: (312) 468 53 00 / 2201) başvurulabileceğini hatırlatalım.

Seminerlere Haziran ayındaki tek seminerden sonra ara verilip Ekim ayında yeniden başlanacaktır.

Problem Semineri 95/5, 3 Mayıs 1995

1. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu, şu şekilde tanımlanıyor: $f(1) = 1$ ve

$$f(n+1) = \begin{cases} f(n)+2, & f(f(n)-n+1) = n \text{ ise;} \\ f(n)+1, & \text{değilse.} \end{cases}$$

(a) f için bir açık ifade bulunuz.

(b) $f(f(n)-n+1) \neq n$ ise, $f(f(n)-n+1) = n+1$ olduğunu gösteriniz.

2. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanıyor:

$$\begin{aligned} f(1) = 1, &\quad f(3) = 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

$f(n) = n$ ve $n \leq 1995$ koşullarını sağlayan pozitif tamsayıların sayısını bulunuz.

3. Sabit bir k pozitif tamsayısı alalım. $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ şu şekilde tanımlanıyor.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \leq k+1 \text{ ise;} \\ f(f(n-1)) + f(n-f(n-1)), & n > k+1 \text{ ise.} \end{cases}$$

F_m dizisini ise şu şekilde tanımlayalım:

$$F_m = \begin{cases} 1, & \text{eğer } m \leq k \text{ ise;} \\ F_{m-1} + F_{m-k}, & \text{eğer } m > k \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda $m \geq 1$ için $f(F_{m+k}) = F_m$ olduğunu kanıtlayınız.

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\mathbb{R}^2$'deki birim kareyi, herhangi bir yatay veya dikey doğru en fazla n dikdörtgenin iç bölgesiyle kesişecek şekilde parçalayabileceğimiz maksimum dikdörtgen sayısı $f(n)$ olsun.

(a) $3 \cdot 2^{n-1} - 2 \leq f(n) \leq 3^n - 2$ olduğunu gösteriniz.

(b) $f(n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ olup olmadığını belirleyiniz.

Problem Semineri 95/6, 24 Mayıs 1995

Aşağıdaki toplamları bulunuz:

1. $r \leq n$ ve $0 \leq p \leq 1$ için

$$\sum_{k=r}^{n} \left[\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \right]$$

2. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{k}}{(k+1)4^k}$$

3. $$\sum_{r=0}^{n} \sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{n}{r} \binom{n+1}{k}$$

4. $$\sum_{k=0}^{m} \binom{m+k}{k} 2^{-k}$$

Problem Semineri 95/7, 7 Haziran 1995

1. Üç boyutlu uzaydaki noktaları her rengi en az bir kez kullanmak üzere beş değişik renge boyuyoruz. En az dört değişik renk içeren bir düzlemin bulunduğunu gösteriniz.

2. Düzlemdeki noktaları iki değişik renge boyuyoruz. Bütün köşeleri aynı renge boyanmış ve kenar uzunluğu ya 1 ya da $\sqrt{3}$ olan eşkenar bir üçgenin varlığını gösteriniz.

3. Düzlemde herhangi bir nokta seçip, bu noktaya olan uzaklığı irrasyonel bir sayı olan tüm noktaları siyaha boyuyoruz. Bu yolla düzlemdeki bütün noktaları siyaha boyamak için böyle en az kaç nokta seçmek gerekir?

4. Düzlemdeki noktaları n değişik renge boyuyoruz. Bu boyama işleminin, hangi n değerleri için, aralarındaki uzaklık 1 olan aynı renge boyanmış herhangi iki nokta bulunmayacak biçimde yapılmasının mümkün olduğunu belirleyiniz.

ÇÖZÜMLER

Bu sayımızda 95/2, 95/3 ve 95/4 seminerlerinin kısa çözümleri yer almaktadır.

Problem Semineri 95/2

Yönetim: Ali Doğanaksoy, Selçuk Ateşkan, Barış Fidan

1. İlk olarak, verilen iki çemberi dik kesen çemberlerin merkezlerinin geometrik yerini bulalım. Verilen çemberler $Ç_1(K_1, k_1)$ ve $Ç_2(K_2, k_2)$ olsun. $Ç_1$ ve $Ç_2$'nin bu çemberleri dik kesen bir $Ç'$ çemberinin X merkezindeki kuvvetleri aynıdır. Bu gözleme dayanarak, önce iki çembere göre kuvvetleri eşit olan noktaların geometrik yerini bulalım. Pisagor Teoremi kullanılarak X'ten K_1K_2 doğrusuna indirilen dikmenin ayağının bu doğru üzerindeki sabit bir F noktası olduğu gösterilebilir. Buna göre söz konusu geometrik yer K_1K_2'yi sabit F noktasında dik kesen doğru üzerindedir. Yine Pisagor Teoremi'ne göre bu doğru üzerindeki her noktanın $Ç_1$ ve $Ç_2$'ye göre kuvvetleri aynı olacağından, aranılan geometrik yer (aynı zamanda $Ç_1$ ve $Ç_2$'yi dik kesen çemberlerin geometrik yeri) $Ç_1$ ve $Ç_2$'nin merkezlerini birleştiren doğruyu dik kesen sabit bir doğrudur. Bu doğruya $Ç_1$ ve $Ç_2$'nin *kuvvet ekseni* adı verilir.

Kuvvet ekseni, çemberler kesişiyorsa, kesişim noktalarını birleştiren doğru olarak kolayca bulunur. Çemberlerin kesişmemesi durumunda, basit bir şekilde kanıtlanabilen Monge Teoremi'ni kullanmamız gerekir.

Monge Teoremi. *Üç çemberin üç kuvvet ekseni, bu üç çemberin kuvvet merkezi adı verilen bir noktadan geçer.*

Kesişmeyen $Ç_1$ ve $Ç_2$'nin kuvvet eksenini bulmak için önce bu iki çemberi kesen bir $Ç'$ çemberi çizilir. $(Ç_1, Ç')$ ve $(Ç_2, Ç')$ ikililerinin kuvvet eksenlerinin kesişim noktası kullanılarak $Ç_1$ ve $Ç_2$'nin kuvvet ekseni çizilir.

Bu açıklamalardan sonra, verilen üç çemberin kuvvet merkezini belirleyebiliriz. Bu merkez bütün çemberlerin dışındaysa, bu merkezi merkez kabul eden ve yarıçapı bu merkezden, çemberlerden herhangi birine çizilen teğetin uzunluğuna eşit olan çember, verilen üç çemberi de dik kesecektir. Kuvvet merkezinin çemberlerin birinin içinde kalması halinde ise problemin çözümü yoktur.

2. Problemin çözülmüş olduğunu kabul edelim. Verilen çember $Ç$; verilen noktalar A, B, C; istenen üçgen XYZ olsun. XZ, ZX, XY doğruları sırasıyla A, B, C noktalarından geçsin. Çizim için 4 yardımcı noktadan yararlanacağız:

N_1: AB'ye paralel ve X'ten geçen kirişin çemberi kestiği ikinci nokta;

N_2: YN_1 ve AB doğrularının kesiştiği nokta;

N_3: N_2C'ye paralel ve X'den geçen kirişin çemberi kestiği ikinci nokta;

N_4: CN_2 ve N_1N_3 doğrularının kesiştiği nokta.

(i) Çember içi açı bağıntılarını ve kirişler dörtgeninin özellikleri kullanılarak $(AN_2)(AB)$ çarpımının $Ç$ çemberinin A noktasındaki kuvvetine eşit olduğu bulunur. A ve B noktalarının yeriyle çemberin A noktasındaki kuvveti bilindiğinden, N_2 noktasının yeri $AN_2 = \frac{P}{AB}$ eşitliğinden belirlenir.

(ii) Benzer şekilde $(N_2N_4)(N_2C)$ çarpımının $Ç$ çemberinin N_2 noktasındaki kuvvetine eşit olduğu bulunur. Buradan da N_4 noktasının yeri belirlenir.

(iii) Çember içi açı bağıntılarından $N_1\widehat{X}N_3$ açısının bilinen $A\widehat{N_2}N_4 = w$ açısına eşit olduğu bulunur.

(iv) N_4'ten geçen ve gördüğü yayın açısı w olan kirişin $Ç$ çemberini kestiği noktalar N_1 ve N_3 noktalarını verir.

(v) X noktası N_3'ten geçen ve N_2N_4'e paralel olan doğrunun $Ç$ çemberini kestiği nokta, Y noktası N_1N_2 doğrusunun $Ç$ çemberini kestiği nokta; ve Z noktası AY doğrusunun $Ç$ çemberini kestiği noktadır.

3. Verilen çember $Ç_1$, çemberin merkezi M, yarıçapı r, verilen iki nokta P_1 ve P_2 olsun. M noktasını merkez kabul eden dik koordinat sisteminde P_1 ve P_2'nin koordinatları sırasıyla (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) olsun. P_1 ve P_2 noktalarından geçen OS_1 ve OS_2 doğruları aranan OS_1S_2 ikizkenar üçgeninin kenarlarıysa, bu eşit kenarların OM doğrusuyla yaptığı Φ_1 ve Φ_2 açıları eşittir. O noktasının koordinatları (c, d) olmak üzere, bu iki açıyla ilgili trigonometrik bağıntıları kullanarak, $A = a+a_2$, $B = b_1+b_2$, $C = a_1b_2+a_2b_1$, ve $D = (a_1a_2 - b_1b_2)$ olmak üzere

$$C(c^2 - d^2) - 2Dcd + (c^2 + d^2)(Ad - Bc) = 0 \quad (1)$$

eşitliği elde edilir. $O(c, d)$ noktası çemberin üzerinde olduğundan

$$c^2 + d^2 = r^2 \qquad (2)$$

sağlanır ve

$$C(c^2 - d^2) - 2Dcd + r^2(Ad - Bc) = 0 \qquad (3)$$

olur.

O noktasının yeri (2)'de denklemi verilen çemberle (3)'te denklemi verilen hiperbolün kesiştiği dört noktadan biridir.

P_1 ve P_2 noktalarının çemberin M merkezinden M_1 ve M_2 uzaklıklarının eşit olduğu durumda (3) denklemi

$$2a_2 r^2 d - 2m_2^2 cd = 0 \qquad (4)$$

halini alır. Bu denklem de

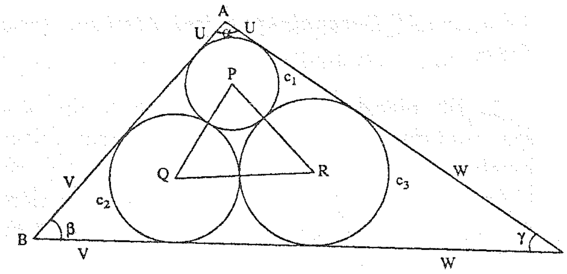
$$(c, d) = (\pm r, 0) \qquad \text{ve} \qquad c = a_2 \frac{r^2}{m_2^2}$$

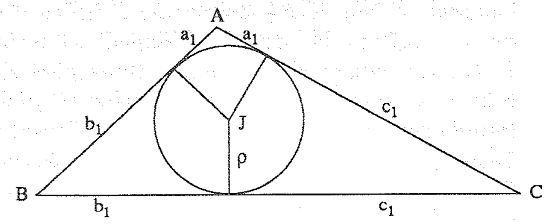
değerleri için sağlanır.

$c = a_2 \frac{r^2}{m_2^2}$ için O noktasının yerini de şöyle bulabiliriz: M noktasından geçen ve çapı $MN = n = \frac{m_2^2}{a_2}$, x ekseni üzerinde yer alan Ç$_2$ çemberinin Ç$_1$ çemberiyle kesim noktası $L(k, 1)$ olmak üzere MNL bir dik üçgendir ve $ML^2 = MNk$, $r^2 = kn$ olur. Buradan $k = c$ elde edilir. Ç$_1$ ve Ç$_2$ noktalarının kesiştiği nokta(lar) aradığımız O noktasının yerini verir. (İki çemberin kesişmesi için $n > r$ veya $m_1^2 > a_2 r$ koşullarının sağlandığını kabul ediyoruz). Bir çemberin içinde merkeze eş uzaklıkta iki nokta verildiğinde, çemberin üzerinde ve bu iki noktaya uzaklıkları toplamı minimum olan noktaların, verilen çember ile verilen noktalar ve verilen ilk çemberin merkezinden geçen çemberin kesiştikleri noktalar olduğu Batlamyus Teoremi'yle gösterilebilir. Böylece O noktasının yeri bulunabilir.

OP_1 ve OP_2 doğrularının Ç$_1$ çemberini kestiği ikinci noktalar istenen ikizkenar üçgenin diğer iki köşesini, S_1 ve S_2'yi verir.

4. Aranan çemberler Ç$_1$, Ç$_2$, Ç$_3$ ve üçgenin kenar uzunlukları a, b, c olsun. Ç$_1$, Ç$_2$, Ç$_3$ çemberlerinin merkezleri ve yarıçapları sırayla P, Q, R ve p, q, r olsun. ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi de J olsun. u, v, w ile Ç$_1$, Ç$_2$, Ç$_3$ çemberlerinin üçgene teğet olduğu noktaların A, B, C noktalarına olan uzaklığını; a_1, b_1, c_1 ile, ABC üçgeninin içteğet çemberinin üçgene teğet olduğu noktaların A, B, C köşelerine olan uzaklıklarını gösterelim. $|PR| = l$, $|PQ| = m$ ve $|QR| = k$ olsun. s'yi $2s = a + b + c$ olacak şekilde tanımlayalım; $s = 1$ kabul edelim.





P, α'nın AJ, Q, β'nın BJ, R de γ'nın CJ açıortayı üzerinde olduğundan, üçgen benzerlikleri kullanılarak $p = \frac{\rho u}{a_1}$, $q = \frac{\rho v}{b_1}$, $r = \frac{\rho w}{c_1}$ elde edilir. Pisagor Teoremi kullanılarak $m = 2\sqrt{pq}$, $1 = 2\sqrt{pr}$, $k = 2\sqrt{qr}$ bulunur. $\rho^2 = \frac{a_1 b_1 c_1}{a_1 + b_1 + c_1}$ eşitliğine dayanarak p, q, r'nin yukarıda bulduğumuz değerlerini kullanırsak üç eşitlik elde ederiz:

$$\begin{aligned} a &= v + w + 2\sqrt{a_1}\sqrt{vw} \\ b &= w + u + 2\sqrt{b_1}\sqrt{wu} \\ c &= u + v + 2\sqrt{c_1}\sqrt{uv} \end{aligned}$$

$s = 1$ olduğ undan dolayı a, b, c, u, v, w uzunlukları 1'den küçüktür ve bu uzunluklar 6 dar açının sinüslerinin kareleri cinsinden yazılabilir. $a = \sin^2\lambda$, $b = \sin^2\mu$, $c = \sin^2\nu$, $u = \sin^2\psi$, $v = \sin^2\varphi$, $w = \sin^2\chi$ olsun. $a_1 = \cos^2\lambda$, $b_1 = \cos^2\mu$, $c_1 = \cos^2\nu$ olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki üç denklemi tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} \sin^2\varphi + \sin^2\chi + 2\sin\varphi\sin\chi\cos\lambda &= \sin^2\lambda \\ \sin^2\chi + \sin^2\chi + 2\sin\chi\sin\psi\cos\mu &= \sin^2\mu \\ \sin^2\psi + \sin^2\varphi + 2\sin\psi\sin\varphi\cos\nu &= \sin^2\nu \end{aligned}$$

Bu denklemlere dayanarak $\lambda = \varphi + \chi$, $\mu = \chi + \psi$,

$\nu = \psi + \varphi$ elde edilir. $\sigma = \frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$ için, $\varphi = \sigma - \lambda$, $\varphi = \sigma - \mu$, $\chi = \sigma - \nu$ olur.

Bu bilgilerin ışığında, sinüslerinin karesi verilen üçgenin kenarlarına eşit olarak λ, μ, ν açılarını çizeriz. Bu açıların yadımıyla σ, φ, χ açılarını elde ederiz. Bu açıların sinüslerinin karelerini çizerek, içteğet çemberlere çizilen teğetlerin uzunluklarını buluruz. Böylece iç teğet çemberleri çizebiliriz.

Problem Semineri 95/3

Yönetim: Ali Doğanaksoy, Oytun Eskiyenentürk, Özcan Öztürk

1. m lirası olan ve $P > \frac{1}{2}$ olasılıkla 1 lira kazanan bir adamın, tüm parasını kaybetme olasılığının $(\frac{1-p}{p})^m$ olduğu, indirgeme denklemleri yazılarak görülebilir. Eğer bu adam $m+n$ liraya ulaşınca kazanırsa, kaybetme olasılığı Q,

$$\left(\frac{q}{p}\right)^m = Q + (1-Q)\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}$$

denkleminden bulunur. $p = \frac{18}{37}$ alırsak, Q, ikinci yöntemin vereceği kazanma olasılığı olur ve $Q \cong 0.25$'tir. Ancak bu değer $\frac{18}{37}$'den küçüktür. Dolayısıyla ilk yol daha iyidir.

2. P_{2n}, A'nın $2n$ oyunda kazanma olasılığı olsun. O zaman,

$$P_{2n} = \sum_{x=n+1}^{2n} p^x q^{n-x}$$

olur. $2n$ oyunun en iyi olması için, $P_{2n-2} \leq P_{2n} \leq P_{2n+2}$ olmalıdır. Ancak P_{2n+2} ile P_{2n} arasındaki fark iki durumdan kaynaklanabilir.

(a) İlk $2n$ oyunda, A'nın $n+1$ oyun kazanıp, sonraki iki oyunu kaybetmesi;

(b) İlk $2n$ oyunda A'nın n oyun kazanıp, son iki oyunu da kazanması.

Bu durumların olasılıklarından,

$$P_{2n+1} - P_{2n} = p^2\binom{2n}{n}p^n q^n - q^2\binom{2n}{n+1}p^{n+1}q^{n-1}$$

olur. Gerekli işlemleri yaparak,

$$\frac{1}{1-2p} - 1 \leq 2n \leq \frac{1}{1-2p} + 1$$

elde ederiz.

3. Her oyunda beklenen kazanç

$$\frac{2}{N+1}N - \frac{N-1}{N+1} = 1$$

liradır. Dolayısıyla, 100 oyun sonunda 200 lira kazanma şansı en fazla 0.5 olur. Her tek sıradaki oyunda 1, her k'yinci çift oyunda $99+k$ seçip, bir kere kazandıktan sonra hep 1 seçilirse, sonuçta ya 200 ya da 0 lira kazanılır. Demek ki bu en iyi yoldur. Ayrıca, 101, 103, 109 sayılarını sırayla 100 oyun içine, $1 \leq k \leq 100$ için ilk k oyunda, 1'lerin sayısı en az bunların sayısı kadar olacak şekilde yerleştirirsek, yine 0.5 kazanma olasılığı elde ederiz. Bu tür yolların sayısı ise

$$\frac{1}{51}\binom{100}{50} \cong 1.58 \times 10^{27}$$

dir.

4. Önceki keselerden daha büyük bir keseye aday diyelim. k'yinci sıradaki bir aday, ancak onu seçmekle kazanma şansımız, devam edip en iyi yolu izlediğimiz takdirde elde edeceğimiz kazanma şansından daha büyük ise seçilmelidir. k'yinci sıradaki bir adayla kazanma şansı $\frac{k}{100}$'dür. k'den sonraki en iyi yolun şansı ise, k arttıkça azalır veya sabit kalır. Demek ki bir noktadan sonra ilk olasılık ikinciyi geçer. Bu da en iyi yöntemin, m tane keseyi pas geçip, ondan sonraki ilk adayı seçmemiz ($m < k \leq 100$ için, $\frac{m}{k-1}$ olasılıkla) olduğunu söyler. Bu olasılığa $f(m)$ dersek,

$$f(m) = \frac{1}{100}\sum_{k=m+1}^{100}\frac{m}{k-1}$$

olur. $f(m-1) \leq f(m) \leq f(m+1)$ eşitsizliği çözülürse, $m = 37$ elde edilir.

Problem Semineri 95/4

Yönetim: Semih Koray, Tolga Etgü, Çetin Ürtiş

1. Bu şekildeki asal sayılar kümesini A ile gösterelim; yani

$$A = \{p \text{ asal} : p = x^2 + y^2,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$$

$2 = 1^2 + 1^2$ şeklinde yazılabildiğinden $2 \in A$'dır. Şimdi $p > 2$ için şu teoremi kanıtlayacağız.

Teorem. $p = 4n+1$, $n \in \mathbb{N}$ *için gerek ve yeter şart* $p = x^2 + y^2$, $x, y \in \mathbb{Z}$ *olmasıdır.*

Kanıt. $p = 4n+1$, $n \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. $a = (\frac{p-1}{2})!$ olsun. $\frac{1}{2}(p-1) = 2n$ olduğu için

$$2 \cdots \frac{1}{2}(p-1) = (-1)(-2) \cdots \left(-\frac{p-1}{2}\right)$$
$$\equiv (p-1)(p-2) \cdots \left(\frac{p+1}{2}\right) \pmod p$$

denkliğini elde ederiz. Buradan

$$\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv 1 \cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2} \frac{p+1}{2} \cdots (p-1)$$
$$\equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod p$$

denkliğini, yani $p \mid a^2 + 1$'i elde ederiz. Bu ise $(p, a) = 1$'i gerektirir. Burada şu teoremi kullanacağız:

Thue Teoremi. $m \in \mathbb{N}$ *ve* $a \in \mathbb{Z}$ *olmak üzere,* $(m, a) = 1$ *ise,* $m \mid ax + y$ *veya* $m \mid ax - y$ *olacak şekilde* $x, y \leq \sqrt{m}$ *doğal sayıları vardır.*

Thue Teoremi'ni kullanırsak, $(p, a) = 1$ olduğundan $p \mid ax + y$ veya $p \mid ax - y$ olacak şekilde $x, y \leq p$ doğal sayıları vardır ve buradan $p = x^2 + y^2$ elde edilir.

Diğer yönün kanıtı için $p = x^2 + y^2$ olduğunu kabul edelim. Bir sayının karesi (mod 4)'te 0, 1 veya 2'ye denktir. Bundan dolayı $x^2 + y^2$, (mod 4)'te 0, 1 veya 2'ye denktir. Bu ise $p > 2$ için sadece $p = 4n+1$, $n \in \mathbb{N}$ olduğu durumda mümkündür. Böylece kanıtı tamamlamış oluruz.

Sonuç olarak,

$$A = \{2\} \cup \{\, p > 2 \text{ asal} : p = 4n+1,\ n \in \mathbb{N} \,\}$$

bulunur.

2. Birinci sorudan, $4k+3$ şeklindeki asalların istenen şekilde yazılamayacağını biliyoruz. Şimdi ise asal çarpanlara ayırımında tek kuvvete sahip $4k+3$ şeklindeki asalları bulunan tamsayıların bu şekilde yazılamayacağını, diğer pozitif tamsayıların ise yazılabileceğini göstereceğiz. Bunun için şu yardımcı teoremi kullanacağız:

Yardımcı Teorem. *Eğer bir* p *tek asal sayısı aralarında asal iki tam sayının kareleri toplamını bölüyorsa,* p, $4k+1$ *formunda olmalıdır.*

Bu yardımcı teoremi modüler aritmetik yardımı ile kanıtladıktan sonra, yine modüler aritmetik ve ortak bölenleri kullanarak şartımızın gerekliliğini gösteririz. Daha sonra ise

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

eşitliğini, 2 ve $4k+1$ formundaki asalların, iki tam karenin toplamı şeklinde yazılabildiğini de kullanarak şartımızın yeterliliğini de gösterir ve kanıtı bitiririz.

3. Sorumuzun cevabı, k ve l negatif olmayan tamsayılar olmak üzere, $4^l(8k+7)$ şeklindeki sayıların üç tam karenin toplamı şeklinde yazılamadığı, diğer tüm pozitif tamsayıların ise yazılabildiği şeklindedir. Bu cevabın ilk kısmını (mod 4) ve (mod 8) içerisindeki işlemler ve olmayana ergi yöntemleriyle kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Ancak diğer kısım için ilk olarak Gauss tarafından bulunan çözüm, henüz tam olarak elementer hale getirilememiş, buna karşın gerek Landau ve Dirichlet'nin, gerekse N. C. Anheny'nin bu konuda birtakım çabaları olmuştur. Bu konuda Landau'nun *Elementary Number Theory* isimli kitabına başvurulabilir.

4. Negatif olmayan tüm tamsayıların bu şekilde yazılabildiğini göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki iki teoremi kullanacağız.

Teorem 1. $p > 2$ *asal sayısı, en az birisi* p *ile bölünmeyen 4 karenin toplamını bölsün. Bu durumda* p, *4 karenin toplamıdır.*

Teorem 2. *Her asal sayı 4 karenin toplamıdır.*

Burada Teorem 1, Teorem 2'nin kanıtında kullanılmaktadır. Şimdi Teorem 2'yi kullanarak negatif olmayan tüm tamsayıların dört tamsayının toplamı olarak yazılabildiğini göstereceğiz.

Euler eşitliğini ele alalım:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) =$$
$$(aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - ba_1 + cd_1 - dc_1)^2$$
$$+ (ac_1 - ca_1 + db_1 - bd_1)^2 + (ad_1 - da_1 + bc_1 - cb_1)^2$$

Bu eşitlikten dolayı 4 karenin toplamı olan iki tamsayının çarpımı yine 4 karenin toplamıdır. Tümevarımla bunu sonlu sayıda çarpan için genişletebiliriz. Birden büyük her tamsayı asal sayıların çarpımı olduğundan, Teorem 2'den dolayi kendisi de 4 karenin toplamıdır. Ayrıca $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ ve $1 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ olduğundan çözüm tamamlanmış olur.