ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A111. 999999999 sayısını hangi sayı ile çarptığımızda, tüm rakamları 1 olan bir sayı elde ederiz?

A112. $a, b > 0$ gerçel sayıları için

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

olduğunu ispatlayınız.

A113. Bir $ABCD$ dörtgeninde $|AB| = |AD|$, $\widehat{CAB} = 3\widehat{CAD}$, $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ ve $|BC| > |AD|$ ise, $\widehat{ACD}$'yi bulunuz. (*Ergün Yaraneri*)

A114. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{99 + 70\sqrt{2}}}$ sayısını $\sqrt{a} + b$ şeklinde ifade ediniz. (*Cuma Arslan*)

A115. $n > 2$ bir doğal sayı ise,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}$$

olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y111. ABC üçgeninde $\hat{A} = 45°$ ve $\hat{B} = 75°$'dir. AB kenarı üzerinde $\widehat{ACP} = 15°$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $|PB| = 2|AP|$ olduğunu ispatlayınız.

Y112. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = (x+1)^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+5)^2$ denkleminin gerçel köklerini bulunuz.

Y113. a, b, c, d pozitif gerçel sayıları veriliyor. Kenar uzunlukları $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$, $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ olan bir üçgenin alanının, a, b, c, d cinsinden rasyonel ifadesi bulunduğunu gösteriniz.

Y114. O merkezli ve r yarıçaplı çemberin üzerinde ve içinde kesişmeyecek şekilde $[AB]$ çapı ve $[CM]$ kirişi çiziliyor. $\widehat{ACM} + \widehat{BMC}$'yi hesaplayınız.

Y115. ABC üçgeninin çevrel çember yarıçapı R, içteğet çember yarıçapı r ve ortik üçgeninin içyarıçapı p ise,

$$p \leq 1 - \frac{(1+r)^2}{3}$$

eşitsizliğini ispatlayınız. (*Turgay Uçkan*)

(Bir üçgenin *ortik üçgeni*, köşeleri kenarlar üzerindeki yükseklik ayakları olan üçgendir.)

ÇÖZÜMLER

A101. ABC üçgeninde $[BR]$ ve $[CS]$ sırasıyla $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarına ait yüksekliklerdir. $\frac{|SR|}{|BC|} = \cos\hat{A}$ olduğunu gösteriniz. (*C. Alparslan Ertuğ*)

Çözüm. $\sin\hat{A} = \frac{|BR|}{|AB|} = \frac{|SC|}{|AC|}$, $\cos\hat{A} = \frac{|AR|}{|AB|} = \frac{|AS|}{|AC|}$ ile

$$\begin{aligned} |SR|^2 &= |AS|^2 + |AR|^2 - 2|AS||AR|\cos\hat{A}, \\ |AR|^2 &= |AB|^2 - |BR|^2, \\ |AS|^2 &= |AC|^2 - |CS|^2 \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\begin{aligned} |BR| &= |AB|\sin\hat{A}, \\ |AR| &= |AB|\cos\hat{A}, \\ |CS| &= |AC|\sin\hat{A}, \\ |AS| &= |AC|\cos\hat{A} \end{aligned}$$

yazılır. Bunlardan

$$\begin{aligned} |AR|^2 &= |AB|^2 - |AB|^2\sin^2\hat{A} = |AB|^2\cos^2\hat{A}, \\ |AS|^2 &= |AC|^2\cos^2\hat{A}, \end{aligned}$$

ve buradan da $|AR||AS| = |AB||AC|\cos^2 A$ bulunur.

$$\begin{aligned} |SR|^2 &= |AC|^2\cos^2\hat{A} + |AB|^2\cos^2 A \\ &\quad - 2|AB||AC|\cos^2\hat{A}\cos\hat{A} \\ &= \cos^2\hat{A}(|AC|^2 + |AB|^2 - 2|AB||AC|\cos\hat{A}) \\ &= |BC|\cos^2 A \end{aligned}$$

olduğundan, $\frac{|SR|}{|BC|} = \cos\hat{A}$ elde edilir.

(**Çözenler:** *Nuran Aysal, Atasağun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Zafer Dumlu, Murat Ergünal, Erol Gedikli, Muammer Keleş, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Batur Orkun,* Osman Özkurt, Gültekin Polat, Melih Sertaç, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkun, Nazım Utku, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldıran, Recep Zihni.)

A102. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 30°$ ve $\widehat{ACB} = 40°$'dir. $[AC]$ kenarı üzerinde $\widehat{MBC} = 20°$ olacak şekilde bir M noktası ve $[BM]$ doğrusu üzerinde de $\widehat{OCB} = 10°$ olacak şekilde bir O noktası alınıyor. O'dan $[BC]$'ye çizelen dikme $[AB]$'yi N noktasında kestiğine göre $\widehat{NMO} = \widehat{NMB}$'yi bulunuz. (*Dinçer Güler*)

Çözüm. M'den $[OC]$'ye çizilen dikme $[OC]$'yi Q ve $[ON]$'yi P'de kessin. $\widehat{PQC}$ ve $\widehat{PRC}$ açıları $[PC]$ kenarını aynı açı gördüklerinden $PQRC$ bir kirişler dörtgenidir. Buradan $\widehat{RPQ} = 10°$ bulunur. Q, OC'nin orta noktası olduğundan, $\widehat{QPC} = 10°$'dir. Ayrıca $\widehat{BNP} = \widehat{BMP} = 60°$ olduğu için, $PBNM$ bir kirişler dörtgeni ve $\widehat{BPN} = \widehat{NMO}$ olur. Öte yandan, $PBOC$ bir kirişler dörtgenidir, çünkü $\widehat{OPC} = \widehat{OBC} = 20°$. Dolayısı ile $\widehat{OPB} = \widehat{OCB} = 10°$ ve $\widehat{NMO} = 10°$ bulunur.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Hasan Denker, Erol Gedikli, Batur Orkun, Ergün Yaraneri.*)

A103. Bir dikdörtgenin paralel iki kenarının her biri m eşit parçaya bölünüp karşılıklı noktalar birer doğru parçası ile birleştirilip m tane dikdörtgen elde ediliyor. Bu şekilde, uç noktaları köşeler olan **çizilmiş** bütün doğru parçalarının sayısını bulunuz. Bu sayının tam kare olup olmadığını araştırınız. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Dikdörtgenin $[AB]$ tabanı üzerinde $n+1$ tane 'köşe' olduğundan, bunları uç kabul eden doğru parçalarının sayısı $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ olur. $[CD]$ üst taban için de aynı sayı bulunacağından toplam $(n+1)$ elde edilir. Bu sayıya, tabana dik olan $n+1$ doğru ilave edilirse $n(n+1)+n+1 = (n+1)^2$ bulunur.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Alper Çay, Erek Göktürk, Nazım Utku.*)

A104. $p(x)$ bir polinom ve $q(x) = p(x)+1$ olsun. $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ polinomunun $p(x)q(x)$ ile bölünebildiğini gösteriniz. (*M. Şahin*)

Çözüm. $A(x) = [P(x)]^{2n} + [p(x)+1]^n - 1$ diyelim. $A(x)$'in $p(x)q(x)$ ile bölünebilmesi için $p(x)$ ve $q(x)$ ile bölündüğünde kalan 0 olmalıdır. $p(x) = 0$ yazalım; $A(x)|_{p(x)=0} = 0$ olur, yani $A(x)$, $p(x)$ ile bölünebilir. $q(x) = 0$ (yani $p(x) = -1$) alırsak, $A(x)|_{p(x)-1} = 0$ olur, yani $A(x)$, $q(x)$ ile bölünür.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Batur Orkun, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Nazım Utku, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldıran.*)

A105. ABC üçgeni içinde bir P noktası alınıyor. BPC, CPA, APB üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırası ile R_x, R_y, R_z ise,

$$\text{Alan}(ABC) \le \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{RR_xR_yR_z}$$

olduğunu ve eşitlik için üçgenin eşkenar olması gerektiğini gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. ABC üçgeninin alanı S olsun. $\widehat{BPC} = \alpha_x$, $\widehat{CPA} = \alpha_y$, $\widehat{APB} = \alpha_z$ diyelim.

Önce $\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &\ge \cos A + \cos B + \cos C\\ &= 2\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right) - 3,\\ \frac{9}{4} &\ge \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\end{aligned}$$

yazılır. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left(\frac{9}{4}\right)^3 &\ge \left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)^3\\ &\ge 27\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2},\\ \frac{9^3}{4^3 27} &\ge \cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2},\\ \frac{3\sqrt{3}}{8} &\ge \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\ &= \sin\frac{B+C}{2}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\\ &\quad + \frac{1}{2}\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\\ &= \sin(B+C)[\sin B + \sin C]\\ &= \sin A \sin B \sin C\end{aligned}$$

ve

$$\sin A \sin B \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad (1)$$

elde edilir.

Şimdi de $\sin\alpha_x \sin\alpha_y \sin\alpha_z \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$ olduğunu gösterelim.

$$Q = \sin\alpha_x + \sin\alpha_y + \sin\alpha_z =$$
$$2\sin\frac{\alpha_x}{2}\cos\frac{\alpha_x}{2} + 2\sin\frac{\alpha_y+\alpha_z}{2}\cos\frac{\alpha_y-\alpha_z}{2}$$

yazılır. $\frac{\alpha_y+\alpha_z}{2} + \frac{\alpha_x}{2} = 180^\circ$ olduğundan

$$\cos\frac{\alpha_x}{2} = -\cos\frac{\alpha_y+\alpha_z}{2},$$
$$\sin\frac{\alpha_x}{2} = \sin\frac{\alpha_y+\alpha_z}{2}$$

sağlanır. Bu değerleri yerine yazınca

$$\begin{aligned} Q &= -2\sin\frac{\alpha_x}{2}\cos\frac{\alpha_y+\alpha_z}{2} + 2\sin\frac{\alpha_x}{2}\cos\frac{\alpha_y-\alpha_z}{2} \\ &= 2\sin\frac{\alpha_x}{2}\left(\cos\frac{\alpha_y-\alpha_z}{2} - \cos\frac{\alpha_y+\alpha_z}{2}\right) \\ &= 2\sin\frac{\alpha_x}{2} 2\sin\frac{\alpha_y}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} \\ &= 4\sin\frac{\alpha_x}{2}\sin\frac{\alpha_y}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{\alpha_x}{2} + \frac{\alpha_y}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = 180^\circ$ olduğundan bu açılar bir üçgenin iç açılarıdır. Dolayısıyla (1) gereğince

$$\sin\frac{\alpha_x}{2}\sin\frac{\alpha_y}{2}\sin\frac{\alpha_z}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Bu eşitsizlik son ifadeye monte edilirse

$$\begin{aligned} Q &= 4\sin\frac{\alpha_x}{2}\sin\frac{\alpha_y}{2}\sin\frac{\alpha_z}{2} \\ &\le 4\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden

$$\begin{aligned} 27Q &\le (\sin\alpha_x + \sin\alpha_y + \sin\alpha_z)^3 \\ &\le \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^3 \end{aligned}$$

ve

$$\sin\alpha_x \sin\alpha_y \sin\alpha_z = \frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

elde edilir.

Artık problemi çözebiliriz. (1) ve (2)'den

$$\sin A \sin B \sin C \sin\alpha_x \sin\alpha_y \sin\alpha_z \le \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2,$$

ve buradan

$$\sin A \sin B \sin C \le \frac{27}{64}\frac{1}{\sin\alpha_x \sin\alpha_y \sin\alpha_z}$$

bulunur. $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$, $\sin\alpha_x = \frac{a}{2R_x}$, $\sin\alpha_y = \frac{b}{2R_y}$, $\sin\alpha_2 = \frac{c}{2R_2}$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{abc}{8R^3} &\le \frac{27}{64}\frac{1}{\frac{abc}{8R_xR_yR_z}}, \\ \frac{a^2b^2c^2}{16R^2} &\le \frac{27}{16}RR_xR_yR_z \end{aligned}$$

elde edilir. $S = \frac{abc}{4R}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{RR_xR_yR_z}$$

sonucuna varılır.

(Çözenler: *Atasağun Baykal*)

Y101. $L = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x - \int_0^x te^t\,dt}{e^x\sin x - \int_0^x e^t \sin t\,dt}$ limitini hesaplayınız. (*Hasan Kullap*)

Çözüm. $\frac{0}{0}$ belirsizlik hali söz konusudur. L'Hospital kuralı uygulanarak

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + xe^x - xe^x}{e^x\sin x + e^x\cos x - e^x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\cos x} = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Çözenler: *Atasağun Baykal, Alper Çay, Güler Çavuşoğlu, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Kerem Güngör, Levent Koçoğlu, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Emre Topaloğlu, Nazım Utku, Naim Uygun, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldıran.*)

Y102. $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üzerinde $\widehat{BAE} = 7.5^\circ$ olacak şekilde E noktası işaretleniyor. $\tan(\widehat{ADE})$'yi hesaplayınız. (*Cuma Arslan*)

Çözüm. Karenin kenar uzunlğunu 1 alalım. $|EC| = x$ olsun. $\widehat{ADE} = \widehat{DEC}$ olup, $\tan(\widehat{ADE}) = \frac{1}{x}$ olur.

$$\tan(15^\circ) = \frac{2\tan(7.5^\circ)}{1-\tan^2(7.5^\circ)},$$
$$\tan(15^\circ) = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

olduğundan

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(1-x)}{1-(1-x)^2}=\frac{2(1-x)}{x(2-x)},$$

ve buradan $(\sqrt{3}-1)x^2-4\sqrt{3}x+2(\sqrt{3}+1)=0$ denklemi elde edilir. Denklemin kökleri

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{8}}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})}{\sqrt{3}-1}$$

dir. $x_1>1$ ve $x_2<1$ olduğundan, $x=\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-1}$ yazılır. Buradan da

$$\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{3}-1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+2)}{2}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Alper Çay, Hasan Denker, Erol Gedikli, Namık Gök, Erek Göktürk, Seyhun Kesim, Levent Koçoğlu, Batur Orkun, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Turgay Uçkan, Nazım Utku, Naim Uygun, Ergün Yaraneri, Uğur Yıldıran, Recep Zihni.*)

Y103. ABC üçgeninde iç teğet çember $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ kenarlarına sırası ile K, M, L noktalarında değmektedir. Bu kenarların orta noktaları da sıra ile P, R, S'dir. $[KP]$, $[MR]$ ve $[LS]$ doğru parçalarının orta noktaları da X, Y, Z ise

$$\frac{\text{Alan}(XYZ)}{\text{Alan}(ABC)}=\frac{3R+2r}{16R}$$

olduğunu gösteriniz. (R, çevrel çemberin yarıçapı; r, içteğet çemberin yarıçapıdır.) (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. $2u=a+b+c$ ve $S=\text{Alan}(ABC)$ diyelim. $|MA|=|AL|=u-a$, $|BL|=|BK|=u-b$ ve $|KC|=|CM|=u-c$'dir.

$$\begin{aligned}
|RK| &= u-b-\frac{a}{2}=\frac{c-b}{2},\\
|RX| &= |XK|=\frac{c-b}{4},\\
|BX| &= \frac{2a+c-b}{4},\\
|XC| &= \frac{2a-c+b}{4},\\
|MR| &= \frac{a-c}{2},\\
|MY| &= |YR|=\frac{a-c}{4},\\
|CY| &= \frac{2b+a-c}{4},\\
|YA| &= \frac{2b-a+c}{4},\\
|SL| &= \frac{a-b}{2},\\
|SZ| &= \frac{a-b}{4},\\
|BZ| &= \frac{2c+a-b}{4},\\
|ZA| &= \frac{2c-a+b}{4}
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ac\sin(\hat{B}),\\
\text{Alan}(BXZ) &= \frac{1}{2}\frac{(2a+c-b)}{4}\frac{(2c+a-b)}{4}\sin(\hat{B})
\end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\text{Alan}(BXZ) = \frac{(2a+c-b)(2c+a-b)}{16ac}S,$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\text{Alan}(CXY) &= \frac{(2a-c+b)(2b+a-c)}{16ab}S,\\
\text{Alan}(AYZ) &= \frac{(2b-a+c)(2c-a+b)}{16bc}S
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca XYZ, BXZ, AYZ, ve CXY üçgenlerinin toplam alanı S'dir. Yukarıdaki eşitlikleri kullanarak ve gerekli sadeleştirmelerle,

$$\begin{aligned}
\text{Alan}(XYZ) &= \frac{3abc(a+b+c)+16S^2}{16abc(a+b+c)}\\
&= \frac{3\frac{abc}{4S}+\frac{4S}{a+b+c}}{4\frac{abc}{S}}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$S=\frac{abc}{4R}=\frac{(a+b+c)r}{2}$$

olduğundan

$$\frac{\text{Alan}(XYZ)}{\text{Alan}(ABC)}=\frac{3R+2r}{16R}$$

elde edilir.

Çözenler: *Atasağun Baykal, Hasan Denker, Erol Gedikli, Ruhi Tabur.*

Y104. $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $x\in\mathbb{R}$ için

$$\varphi(x+h^2+h)=\varphi(x-h^2-h)+\frac{4xh}{x^2+1995}$$

eşitliği sağlanıyor. $\varphi(0) = 0$ ise $\varphi(1)$ değerini hesaplayınız. (*M. Şahın*)

Çözüm 1. $x = \frac{1}{2}$ ve $h = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ alınırsa, $h^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ve $h^2 + h = \frac{1}{2}$ olduğundan, $x + h^2 + h = 1$ ve $x - h^2 - h = 0$ olur. Böylece

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{4(\frac{1}{2})(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4} + 1995} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{7981}$$

bulunur.

Çözüm 2.

$$\frac{\varphi(x + h^2 + h) - \varphi(x - h^2 - h)}{h} = \frac{4x}{x^2 + 1995}$$

ve buradan

$$(h+1)\left(\frac{\varphi(x + h^2 + h) - \varphi(x)}{h(h+1)} + \frac{\varphi(x - h^2 - h) - \varphi(x)}{-h(h+1)}\right) = \frac{4x}{x^2 + 1995}$$

yazılır. $h \to 0$ için limit alınırsa

$$2\varphi'(x) = \frac{4x}{x^2 + 1995}$$

ve

$$\varphi(x) = \ln(x^2 + 1995) + C$$

elde edilir. $\varphi(0) = 0$ şartından $C = -\ln(1995)$ bulunur.

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 1995}{1995}\right)$$

ve sonuçta

$$\varphi(1) = \ln\left(\frac{1996}{1995}\right)$$

olur.

İki farklı yoldan elde edilen farklı iki sonucun yorumlanmasını gelecek sayıya bırakıyoruz. (İpucu: Çözüm yollarını bir yana bırakıp φ fonksiyonunun tanımını incelemelidir.)

Y105. ABC üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde $|AE| = |EF| = |FG| = 2$ ve $|GC| = 6$ olacak şekilde E, F, G noktaları işaretleniyor. $[AB]$ kenarı üzerinde de $|AD| = 3$ ve $|DB| = 5$ olacak şekilde D noktası işaretleniyor. $\widehat{GDC} = \widehat{EBF}$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

Çözüm. Kosinüs kuralından

$$\begin{aligned} |BE|^2 &= 68 - 32\cos\hat{A}, \\ |BF|^2 &= 80 - 64\cos\hat{A}, \\ |DG|^2 &= 45 - 36\cos\hat{A}, \\ |DC|^2 &= 153 - 72\cos\hat{A} \end{aligned}$$

olur. Öte yandan,

$$\begin{aligned} 4 &= |BE|^2 + |BF|^2 - 2|BE||BF|\cos(\widehat{EBF}), \\ 36 &= |DG|^2 + |DC|^2 - 2|DG||DC|\cos(\widehat{GDC}) \end{aligned}$$

da sağlanır. Buradan $\cos(\widehat{EBF}) = \cos(\widehat{GDC})$ ve $\widehat{EBF} = \widehat{GDC}$ elde edilir.

Çözenler: *Murat Aygen, Atasağun Baykal, Hasan Denker, Namık Gök, Erek Göktürk, Batur Orkun, Osman Özkurt, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Emre Topaloğlu, Turgay Uçkan, Erol Ünal, Uğur Yıldıran.*)