KAYNAKÇA

[1] B. Güvenç, *Ödüllü Problem, Matematik Dünyası*, **2**, sayı 2, 21 (1992).

[2] C. Uluçay, *Konform Tasvir*, Şirketi Mürettibiye, İstanbul, 1955.

# MÜKEMMEL SAYILAR ÜZERİNE

Sedat İlhan *

**Tanım 1.** *Bir $M$ pozitif tamsayısının bütün pozitif bölenlerinin toplamını $G(M)$ ile ifade edelim. $M$ hariç ve 1 dahil olmak üzere, $M$'nin pozitif bölenlerinin toplamı $M$'ye eşit oluyorsa, $M$ sayısına mükemmel (yetkin) sayı denir.*

Bir başka değişle, $M$ pozitif tamsayısının bütün pozitif bölenlerinin ($M$ dahil) toplamı, $M$'nin iki katı oluyorsa $M$'ye mükemmel sayı deriz. Buna, $6, 28, 496, 8128, \ldots$ gibi sayıları örnek olarak verebiliriz.

Şimdi de bir sayının mükemmel olması için hangi koşulları taşıması gerektiğini araştıralım.

**(1)** $M$ bir asal sayı ise $M$ mükemmel olamaz: $G(M) = M + 1 \neq 2M$'dir.

**(2)** $M = p^2$ ($p$ asal) ise $M$ mükemmel olamaz: $G(M) = 1 + p + p^2 \neq 2p^2$.

Daha genel olarak, $M = p^a$ ($p$ asal ve $a$ bir doğal sayı) ise, $M$ mükemmel olamaz. $M$'nin bütün pozitif bölenlerinin ($M$ hariç) toplamı

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{a-1} = \frac{p^a - 1}{p - 1} \neq p^a$$

şeklindedir.

**(3)** $M = p^a q^b$ ($p$ ve $q$ asal, $q \neq p$ ve $a, b \in \mathbb{N}$) sayısı da her zaman mükemmel olmaz, çünkü $M$'nin pozitif bölenlerinin ($M$'nin kendisi dahil) toplamı

$$G(M) = (1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^a)\cdot \\ \cdot(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^b) \neq 2M$$

olacaktır. Ancak $a = 1$, $q = 2$ ve $p = 2^{b+1} - 1$ özel halinde $G(M) = 2M$ olup bu hal dışında $M$ mükemmel olmaz. Sonuçta $M = 2^n(2^{n+1} - 1)$ sayısı, $2^{n+1} - 1$ asal olduğu zaman daima mükemmeldir diyebiliriz:

$$\begin{aligned} G(M) &= G(2^n)\,G(2^{n+1} - 1) \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}(1 + 2^{n+1} - 1) \\ &= 2(2^n(2^{n+1} - 1)) = 2M. \end{aligned}$$

Hemen şu soru aklımıza gelebilir. "Hangi $n$'ler için $2^{n+1} - 1$ sayısı asaldır?" Bu soruya vereceğimiz ilk yanıt, "$n + 1$ asal ise $2^{n+1} - 1$ sayısı asal olur" diye olursa bir yanılgıya varırız. Çünkü bu sayı her zaman asal olmaz. Örneğin, $n$ tamsayısını 22 olarak alırsak $n + 1$ sayısı asal olduğu halde $2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \cdot 178481$ asal olmaz. Böylece de $2^{22}(2^{23} - 1)$ sayısı mükemmel olmaz.

Söz konusu olan bu soru, günümüze kadar çözümü yapılamayan açık sorulardan biridir. Üstelik mükemmel sayıların sonsuz sayıda olup olmadığı bile açık bir sorudur.

Mersenne sayıları dediğimiz, $p$ asal olmak üzere, $M_p = 2^p - 1$ şeklinde yazılıp asal olan sayılar ile mükemmel sayılar arasında bir ilişkinin var olduğunu söylememiz yanlış olmaz. Çünkü $p = 2, 3, 5, 7, 13, \ldots, 216091, \ldots$ değerleri için $M_p$'nin asal, dolayısıyla $M = M_p(2^{p-1})$ sayının mükemmel olduğu bilinmekte, ama $p \leq 216091$ dışındaki $p$ asal sayıları için $M_p$'nin asal olup olmadığı bilinmemektedir. Buradaki $M_{216091}$ sayısı 65050 basamaklı bir sayıdır [6].

Bütün bunlardan mükemmel sayıların bir çoğunun çift olduklarını söyleyebiliriz. "Tek mükemmel sayılar var mıdır?" sorusuna vereceğimiz cevap "bilinmiyor" olmakla beraber, bu sayılar hakkında çeşitli yaklaşımlarda bulunabiliriz.

**Tanım 2.** *Ne 1, ne de $M$ dahil, $M$ sayısının bütün pozitif bölenlerinin toplamı $M$'ye eşit, veya $M$'nin bütün pozitif bölenlerinin toplamı $2M + 1$ oluyorsa, $M$ sayısına bir PM1 sayısıdır deriz. Eğer $M$ sayısının bütün pozitif*

*Dicle Üniversitesi Matematik Bölümü araştırma görevlisi

...inin toplamı $2M-1$ oluyorsa $M$ sayısına ... PP1 sayısı denir.

Şimdi, $F(M) = 2M - G(M)$ ile $M$'nin ... farkını tanımlayalım. Bu tanım altında

(a) $F(M) = 0$ ise $M$ sayısı mükemmel olur;

(b) $F(M) = -1$ ise $M$ sayısı PM1 olur;

(c) $F(M) = 1$ ise $M$ sayısı PP1 olur.

Yukarıda yazdıklarımızdan aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz:

1. Eğer $M$ bir PM1 sayısı ise, $M$ bir tek karedir. Yani, $p_i$'ler asal ve $p_i \neq 2$ olmak üzere, $M = p_1^{2n_1}p_2^{2n_2}\cdots p_s^{2n_s}$ olur [3].

Bundan sonra vereceğimiz sonuçlarda, PM1 sayısı $M$'yi böyle düşüneceğiz.

2. $F(L) \leq 0$ ve $M = kL$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ ise, $F(M) < F(L)$ olur. Özellikle $F(K) < 0$ ise, $L$'nin hiçbir katı PM1 olamaz [3].

3. Eğer $N$ bir PM1 sayısı ise,

$$\left(\frac{p_1}{p_1-1}\cdots\frac{p_s}{p_s-1}\right)\left(\frac{p_1^3-1}{p_1^3}\cdots\frac{p_s^3-1}{p_s^3}\right) \leq 2+\frac{1}{N} < \left(\frac{p_1}{p_1-1}\cdots\frac{p_s}{p_s-1}\right)$$

sağlanır [bf2].

4. $M = Np^{2n}$, $p \nmid N$, $p$ asal, ve $M$ bir PM1 sayısı ise,

$$\frac{2N}{F(N)} - \frac{1}{p} \leq p < \frac{2N}{F(N)}$$

sağlanır. Özellikle

$$\frac{2N}{F(N)} - \frac{1}{3} \leq p < \frac{2N}{F(N)}$$

gerçeklenir. Bu sonuç, $M$ sayısının PP1 olması halinde de doğrudur [3].

5. $(1, 10^7)$ aralığında hiçbir PM1 sayısı yoktur [2].

6. 2'nin her kuvveti PP1'dir, çünkü $M = 2^n$ ise $G(M) = 2^{n+1} - 1$ olur ve

$$F(M) = 2M - G(M) = 2\cdot 2^n - (2^{n+1} - 1) = 1$$

sağlanır.

7. $N$ bir PP1 sayısı ve $2N-1$ asal olmak üzere, $M = N(2N-1)$ ise, $M$ mükemmeldir, çünkü

$$G(M) = G(N)G(2N-1) = G(N)2N = (2N-1)2N$$

olur ve $F(M) = 2M - G(M) = 0$ sağlanır.

**Editörün Notu.** Yazar, Mersenne sayıları ile yetkin sayılar arasında bir ilişkinin olduğunu söylemenin yanlış olmayacağını söylüyor. Gerçekten de öyle! Öklit ve Euler tarafından kanıtlanan ve Mersenne sayıları ile yetkin çift sayılar arasında bire bir ilişki kuran şu teoremin kanıtı ve açıklayıcı örnekler [4]'te var.

**Teorem.** *$n$ bir çift tamsayı olsun. $n$'nin yetkin olması için gerekli ve yeterli koşul, $p$ ve $2^p-1$ asal olmak üzere $n$'nin $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ şeklinde yazılabilmesidir.*

Bilinen en büyük Mersenne sayısı 756839. Sonsuz tane Mersenne sayısının var olduğu ileri sürülmesine karşın bu henüz kanıtlanmamış bir sav. Yetkin sayı tanımı M.Ö. 300 yıllarında Öklit tarafından verilmiş. Öklit 23 yüzyıl önce tüm yetkin sayıların çift sayılar olduğunu ileri sürmüş, ama bugün hâlâ bir tek sayının yetkin olup olamayacağını bilemiyoruz. Ancak bir tek sayının yetkin olması için gerekli koşullar kanıtlanmış. Örneğin, (eğer varsa) tek ve yetkin bir sayının en az sekiz tane asal böleni olması ve en az yüz basamaklı olması gerekiyor. Ancak bu sayılar hakkındaki en çarpıcı sonuç Euler'in şu teoremi:

**Teorem.** *$n$ bir tek ve yetkin tamsayı ise, $p$, $q_1, \ldots, q_r$ asal ve $p \equiv a \equiv 1 \pmod 4$ olmak üzere $n = p^a q_1^{2b_1} q_2^{2b_2} \cdots q_r^{2b_r}$ şeklinde yazılabilir.*

## KAYNAKÇA


[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4. baskı, Clarendon, Oxford (1960).

[2] A. M. İbrahim & F. A. Salama, *On Odd Perfect Numbers*, *Journal of Institute of Mathematics and Computer Sciences*, **4**, sayı 1 (1993).

[3] R. P. Jerrad & N. Temperley, *Almost Perfect Numbers*, *Mathematics Magazine*, **46**, sayı 2 (1973).

[4] H. T. Kaptanoğlu, *Sayılar Dünyasında Gezintiler*, *Matematik Dünyası*, **4**, sayı 4, 12–16 (1994).

[5] H. Rademacher & O. Toeplitz (çeviren O. Ş. İçen), *Sayılar ve Şekiller*, 2. baskı, Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1964.

[6] L. Welsh, *Bibliography and Listing of Mersenne Numbers*, `pub/Math/mersenne.zip`, *Bilkent Üniversitesi FTP Arşivi*, (1989).