

## ARDIŞIK SAYILARIN TOPLAMI

Ali Nesin \*

Bu yazıda "sayı" sözcüğünü, 1, 2, 3, 4, 5 gibi, pozitif tamsayılar için kullanacağız. Konumuz ardışık sayıların toplamı. 7 ve 8 gibi, ya da 7, 8 ve 9 gibi ardarda gelen sayılara *ardışık* denir. Örneğin 17, iki ardışık sayının toplamıdır:

$$17 = 8 + 9.$$

21, üç ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 6 + 7 + 8.$$

21, aynı zamanda altı ardışık sayının toplamıdır:

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$$

45, en az iki ardışık sayının toplamı olarak beş değişik biçimde yazılır:

$$\begin{aligned} 45 &= 22 + 23 \\ &= 14 + 15 + 16 \\ &= 7 + 8 + 9 + 10 + 11 \\ &= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \end{aligned}$$

44, sekiz ardışık sayının toplamıdır:

$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9,$$

ve 44, en az iki ardışık sayının toplamı olarak başka türlü yazılamaz. Ama 1, 2 ve 4 sayıları en az iki ardışık sayının toplamı değildirler. 7 ve 11 sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazılabilirler ama üç veya daha fazla ardışık sayının toplamı olarak yazılamazlar. Bu yazıda hangi sayıların en az iki ve en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışacağız. Daha doğrusu siz bulmaya çalışacaksınız. Aşağıda bu amaçla sekiz soru bulacaksınız. Asıl amaç altıncı ve sekizinci soruları yanıtlamak. Kimi okurun doğrudan bu sorularla uğraşmak için yeterince zamanı olmayabilir. Bu okurların ilk basamaktan, yani birinci sorudan başlamalarını öneririm. Önce birinci soruyu

çözen okur ikinci soruyu daha rahat çözecektir. Önce ikinci soruyu çözen okur üçüncü soruyu daha rahat çözecektir ... Yani sorular gittikçe zorlaşmaktadır. En zor sorular altıncı ve sekizinci sorulardır. Kendine güvenen okur yazıyı okumayı burda kesip önce hangi sayıların en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu araştırabilir. Sonra da hangi sayıların en az üç ardışık sayının toplamı olduğunu ...

Çoğu zaman olduğu gibi (ama her zaman değil), burada da araştırmaya deneyle başlamak yararlı olabilir. Örneğin 1'den 50'ye kadar olan sayılardan hangilerinin en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulmaya çalışırsanız, hem sorunun yanıtını tahmin edebilirsiniz, hem de tahmininizin doğru olduğunu nasıl kanıtlanmanız gerektiğini anlayabilirsiniz.

**Birinci Soru.** *Hangi sayılar ardışık iki sayının toplamıdır? (Yanıt: Tek sayılar. Önce, her ardışık iki sayının toplamının tek sayı olduğunu kanıtlayın. Sonra da her tek sayının iki ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayın.)*

**İkinci Soru.** *Hangi sayılar ardışık üç sayının toplamıdır?*

**Üçüncü Soru.** *Hangi sayılar ardışık beş sayının toplamıdır?*

**Dördüncü Soru.** *Hangi sayılar ardışık yedi sayının toplamıdır?*

**Beşinci Soru.** *En az iki ardışık sayının toplamı olan sayıların 1'den büyük bir tek sayıya bölündüklerini, yani  $2^n$  biçiminde yazılamayacaklarını kanıtlayın<sup>1</sup>.*

**Altıncı Soru.** *Hangi sayılar en az iki ardışık sayının toplamıdır?*

\* California Üniversitesi (Irvine) Matematik Bölümü öğretim üyesi

<sup>1</sup>Bu soruyu çözmek için 1'den  $r$ 'ye kadar olan sayıların toplamının  $r(r+1)/2$  olduğunu bilmek gerekebilir. Bu eşitlik çok bilinen bir eşitliktir. Çeşitli biçimde kanıtlanabilir, örneğin tümevarımla. Geometrik bir "kanıt," *Matematik ve Korku* adlı kitabımın *Pisagor ve Sayılar* yazısında bulunabilir.

**Yedinci Soru.** *Asal bir sayının en az üç ardışık sayının toplamı olamayacağını kanıtlayın.*

**Yanıtlar**

**Sekizinci Soru.** *Hangi sayılar en az üç ardışık sayının toplamıdır?*

Önce ilk 48 sayıya gözatalım. Bu sayıları en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmaya çalışalım. Aşağıdaki tabloda en kısa ve en uzun toplamları bulacaksınız:

1	yazılamaz	25	12 + 13; 3 + 4 + 5 + 6 + 7
2	yazılamaz	26	5 + 6 + 7 + 8
3	1 + 2	27	13 + 14; 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
4	yazılamaz	28	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
5	2 + 3	29	14 + 15
6	1 + 2 + 3	30	9 + 10 + 11; 4 + 5 + 6 + 7 + 8
7	3 + 4	31	20 + 21
8	yazılamaz	32	yazılamaz
9	4 + 5; 2 + 3 + 4	33	16 + 17; 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8
10	1 + 2 + 3 + 4	34	7 + 8 + 9 + 10
11	5 + 6	35	17 + 18; 2 + 3 + ... + 8
12	3 + 4 + 5	36	11 + 12 + 13; 1 + 2 + ... + 8
13	6 + 7	37	13 + 14
14	2 + 3 + 4 + 5	38	8 + 9 + 10 + 11
15	7 + 8; 1 + 2 + 3 + 4 + 5	39	19 + 20; 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
16	yazılamaz	40	6 + 7 + 8 + 9 + 10
17	8 + 9	41	20 + 21
18	5 + 6 + 7; 3 + 4 + 5 + 6	42	13 + 14 + 15; 3 + 4 + ... + 9
19	9 + 10	43	21 + 22
20	2 + 3 + 4 + 5 + 6	44	2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
21	10 + 11; 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	45	22 + 23; 1 + 2 + ... + 9
22	4 + 5 + 6 + 7	46	10 + 11 + 12 + 13
23	11 + 12	47	23 + 24
24	7 + 8 + 9	48	15 + 16 + 17

**Birinci Sorunun Yanıtı.** Birkaç deneme sorunun yanıtını verecektir:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 \\ 2 + 3 &= 5 \\ 3 + 4 &= 7 \\ 4 + 5 &= 9 \\ 5 + 6 &= 11 \\ 6 + 7 &= 13 \\ 7 + 8 &= 15 \end{aligned}$$

Hep tek sayı elde ettiğimiz gözünüzden kaçmamıştır. Doğru, hep tek sayı elde ederiz. Neden? Kanıtlayalım. Ardışık iki sayıdan biri tektir, öbürü çift; dolayısıyla bu iki sayıyı topladığımızda tek sayı elde ederiz. Dolayısıyla ardışık iki sayının toplamı hep tek sayıdır.

Bunun tersi de hemen hemen doğrudur: 1 dışında her tek sayı, iki ardışık sayının toplamıdır. Örneğin, 125, 62 + 63 olarak; 147, 73 + 74 olarak yazılabilir. 1 dışında her tek sayının iki ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayabiliriz.

miyiz? Evet. Kanıt oldukça kolaydır:  $x \neq 1$  herhangi bir tek sayı olsun.  $x$  tek olduğundan,  $x$ 'i  $2n + 1$  olarak yazabiliriz. Şimdi  $x$ 'i,  $n + (n + 1)$  olarak, yani iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. (Not:  $x > 1$  olduğundan,  $n \geq 1$ 'dir).

**İkinci Sorunun Yanıtı.** Yukarıdaki gibi birkaç deneme yapmak sorunun yanıtını verecektir:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 &= 6 \\ 2 + 3 + 4 &= 9 \\ 3 + 4 + 5 &= 12 \\ 4 + 5 + 6 &= 15 \\ 5 + 6 + 7 &= 18 \\ 6 + 7 + 8 &= 21 \end{aligned}$$

Hep üçe bölünen sayılar elde ediyoruz. Hepsinin mi? Hayır. 3 sayısı, üç ardışık sayının toplamı değildir. Ama 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır. Demek ki

savımız şu olmalı: Üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür ve 3 dışında üçe bölünen her sayı üç ardışık sayının toplamıdır. Savımızı kanıtlayalım.

Üç ardışık sayı alalım. Bu sayıların ortancasına  $n$  diyelim. Demek ki üç sayımız  $n - 1$ ,  $n$  ve  $n + 1$ . Bu üç sayıyı toplayalım:

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

elde ettik. Bu sayı üçe bölünür. Demek ki, her üç ardışık sayının toplamı üçe bölünür.

Şimdi de üçe bölünen ama 3 olmayan herhangi bir sayı ele alalım. Bu sayıya  $x$  diyelim ve  $x$ 'in üç ardışık sayının toplamı olduğunu kanıtlayalım. Yukarıdaki dizelge aşağı yukarı kanıtı veriyor: Eşitliğin solundaki ortanca sayı, toplamın üçte biri.  $x$ 'i üçe bölelim. Çıkan sayıyı, bir öncekini ve bir sonrakini toplayalım.  $x$ 'i elde ederiz. Örneğin,  $x = 27$  ise,  $x/3 = 9$ 'dur ve  $27 = 8 + 9 + 10$ 'dur.

Biçimsel olarak şöyle kanıtlarız.  $x$  üçe bölündüğünden,  $x$ 'i  $3n$  olarak yazabiliriz:  $x = 3n$ . Şimdi aşağıdaki eşitliğe bakın:

$$x = 3n = (n - 1) + n + (n + 1).$$

Demek ki  $x$ , üç ardışık sayının ( $n - 1$ 'in,  $n$ 'nin ve  $n + 1$ 'in) toplamıdır. (Not:  $x > 3$  olduğundan,  $n - 1 \geq 1$ 'dir).

Savımız kanıtlanmıştır.

**Üçüncü Sorunun Yanıtı.** 5 ve 10 dışında, beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Örneğin,

$$\begin{aligned} 15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ 20 &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\ 25 &= 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \end{aligned}$$

Beş ardışık sayının toplamının her zaman 5'e bölüneceğini kanıtlamak oldukça kolaydır:

$$\begin{aligned} x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) &= 5x + 10 \\ &= 5(x+2). \end{aligned}$$

Şimdi bunun tersini kanıtlayalım: 5'e bölünen bir sayıyı beş ardışık sayının toplamı olarak yazmaya çalışalım. Yukarıdaki dizelgeye bir göz atalım. Eşitliğin sağ tarafının ortanca sayısı, toplamın beşte biri.  $x$ , beşe bölünen ama ne 5 ne de 10 olan bir sayı olsun.  $x = 5n$  olarak yazalım. Şimdi  $x$ ,

$$n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$$

<sup>2</sup> Bu çok bilinen bir eşitliktir. Çeşitli biçimlerde kanıtlanabilir, örneğin tümevarımla. Geometrik bir kanıt için *Matematik ve Korku* adlı kitabımın *Pisagor ve Sayılar* yazısına bakınız.

ardışık sayılarının toplamıdır. (Not:  $x \geq 15$  olduğundan,  $n - 2 \geq 1$ 'dir).

**Dördüncü Sorunun Yanıtı.** Bu sorunun yanıtı da ikinci ve üçüncü soruların yanıtı gibidir. 7, 14 ve 21 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayının toplamıdır. Biçimsel kanıtı okura bırakıyorum.

**Beşinci Sorunun Yanıtı.**  $x$ , en az iki ardışık sayının toplamı olan bir sayı olsun. Diyelim  $x$ ;

$$b, b + 1, b + 2, \dots, b + r$$

ardışık sayılarının toplamı ( $r \geq 1$  elbette). Yani

$$(1) \quad x = b + (b + 1) + (b + 2) + \dots + (b + r).$$

Bu toplamda  $r + 1$  tane  $b$  var. Demek ki toplamımız

$$(r + 1)b + [1 + 2 + \dots + r]$$

sayısına eşit. 1'den  $r$ 'ye kadar olan sayıların toplamı  $r(r + 1)/2$ 'dir<sup>2</sup>. Demek ki

$$x = (r + 1)b + \frac{r(r + 1)}{2}.$$

$r + 1$ 'i dışarı çıkaralım ve eşitliği 2'yle çarpalım.

$$(2) \quad 2x = (r + 1)(2b + r)$$

elde ederiz. Eğer  $r + 1$  ve  $2b + r$  sayılarından birinin tek olduğunu kanıtlarsak işimiz iştir, çünkü bu tek sayı  $x$ 'i bölmek zorunda. Eğer  $r + 1$  tekse bir sorun yok. Eğer  $r + 1$  çiftse,  $r$  tektir ve dolayısıyla  $2b + r$  de tektir. Kanıtımız bitmiştir.

Yukarıdaki kanıtta, (1) eşitliğinden (2) eşitliğini elde ettiğimiz okurun gözünden kaçmamalıdır. Bu olguyu birkaç kez daha kullanacağız.

**Altıncı Sorunun Yanıtı.** Önce bir tahminde bulunmak gerekiyor. Şimdiye değin bulduklarımızı gözden geçirelim:

Herşeyden önce beşinci soruya göre, 1, 2, 4, 8, 16 gibi  $2^n$  biçiminde yazılan sayılar iki ya da daha fazla ardışık sayının toplamı olamazlar. Öbür sayılara, yani bir tek sayıya bölünen sayılara bakalım.

Birinci soruya göre, 1 dışında her tek sayı iki ardışık sayının toplamıdır.

Üçe bölünen sayılara bakalım. İkinci soruya göre, 6, 9, 12, 15 gibi üçe bölünen sayılar üç ardışık sayının toplamıdır. 3 tek olduğundan, 3 de iki ardışık sayının toplamıdır. Demek ki üçe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Şimdi de beşe bölünen sayılara bakalım. Üçüncü soruya göre, 5 ve 10 dışında beşe bölünen her sayı beş ardışık sayının toplamıdır. Tek olduğundan, 5 de iki ardışık sayının toplamıdır. Ya 10?  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$  olduğundan, 10 da ardışık sayıların toplamıdır. Sonuç olarak beşe bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Sıra yediye bölünen sayılara geldi. Dördüncü soruya göre 7 ve 14 dışında yediye bölünen her sayı yedi ardışık sayının toplamıdır. 7 tektir, dolayısıyla iki ardışık sayının toplamıdır. 14'ü ardışık sayıların toplamı olarak yazmak biraz daha zor:

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5.$$

Demek ki yediye bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Tahminimiz ne olmalı?  $2^n$  biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamı olabilir mi? Galiba, ama pek emin değiliz. 11'e bölünen sayılara bakalım. Bu sayıların çoğunun onbir ardışık sayının toplamı olduğunu hissediyoruz. Sayımıza  $x$  diyelim.  $x$ 'i onbire bölelim. Çıkan sayıya  $n$  diyelim. Şimdi aşağıdaki onbir sayıyı toplayalım:

$$n - 5, n - 4, \dots, n, \dots, n + 4, n + 5.$$

$11n$ , yani  $x$  buluruz. Ama burada  $n - 5 > 0$  olmalı, yani  $x/11 - 5 > 0$  olmalı, yani  $x > 55$  olmalı. Peki,  $x = 11, 22, 33, 44, 55$  ise ne yapacağız? Bu sayılar en az iki ardışık sayının toplamı mıdır? 11, 33 ve 55 tek olduklarından, bu sayıları iki ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz. 22 ve 44 de en az iki ardışık sayının toplamıdır:

$$22 = 4 + 5 + 6 + 7$$

$$44 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9.$$

Demek ki 11'e bölünen her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır.

Galiba tahminimiz doğru, galiba  $2^n$  biçiminde yazılamayan her sayı (yani 1'den büyük bir tek sayıya bölünen her sayı) en az iki ardışık sayının toplamıdır. Artık savımızı yazabiliriz:

<sup>3</sup> Bu açıklama, yazının sonuçlarını öğrencilerine kanıtlattırarak isteyen öğretmene yardımcı olabilir. Ayrıca, bir sayıyı nasıl çeşitli biçimlerde ardışık sayıların toplamı olarak yazabileceğimizi de öğretebilir.

Sav.  $2^n$  biçiminde yazılamayan her sayı en az iki ardışık sayının toplamıdır. Ve en az iki ardışık sayının toplamı olan hiçbir sayı  $2^n$  biçiminde yazılamaz.

**Savın Kanıtı.** Savımızın ikinci bölümünü beşinci soruda kanıtlamıştık. Birinci bölümü kanıtlayalım.  $x$ ,  $2^n$  biçiminde yazılmayan bir sayı olsun. Demek ki  $x$ , 1'den büyük bir tek sayıya bölünür.  $x$ 'i bölen tek sayıyı  $2k+1$  olarak yazalım ve bölme işleminin sonucuna  $a$  diyelim. Demek ki

$$(3) \quad x = (2k + 1)a.$$

Şimdi  $a - k$ 'yle  $a + k$  arasındaki  $2k + 1$  sayıyı toplayalım.

$$(a - k) + (a - k + 1) + \dots + (a - 1) + a \\ + (a + 1) + \dots + (a + k - 1) + (a + k).$$

Bu toplamda bir sürü terim sadeleşir. Örneğin, birinci ve sonuncu terimlerdeki  $k$ 'ler sadeleşir, ikinci ve sondan ikinci terimlerdeki  $k - 1$ 'ler sadeleşir ... Sonuç olarak  $2k + 1$  tane  $a$ 'yı toplarız, yani toplamın sonucu  $(2k + 1)a$ 'dır, yani  $x$ 'tir. Eğer toplamdaki ilk sayı, yani  $a - k$ , pozitif ise,  $x$ 'i bu biçimde  $2k + 1$  ardışık sayının toplamı olarak yazabiliriz.  $a - k \leq 0$  ise ne yapacağız?

Bundan böyle  $a - k$ 'nin pozitif olmadığını varsayalım, yani  $a \leq k$  eşitsizliğini varsayalım. Bu durumda ne yapmalıyız? Önce yanıtı vereyim. Yanıtı nasıl bulduğumu sonra açıklayacağım<sup>3</sup>.

$$(4) \quad b = k - a + 1$$

ve

$$(5) \quad r = 2a - 1$$

olsun.  $b$ 'nin en az 1 olduğuna dikkatinizi çekerim.  $b$ 'den  $b + r$ 'ye kadar olan sayıları, yani

$$b, b + 1, b + 2, \dots, b + r$$

sayılarını toplayalım:

$$b + (b + 1) + (b + 2) + \dots + (b + r).$$

Toplamın  $x$ 'e eşit olduğunu kanıtlayacağım. Beşinci sorudaki gibi hesaplırsak, toplamın

$$(r + 1)b + \frac{r(r + 1)}{2}$$

## NESİN

sayısına eşit olduğunu görürüz. Bu sayıyı (3), (4) ve (5)'teki tanımları kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (r+1)b + \frac{r(r+1)}{2} &= \frac{(r+1)(2b+r)}{2} \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{2a(2b+2a-1)}{2} \\ &= a(2b+2a-1) \\ &\stackrel{(4)}{=} a(2(k-a+1)+2a-1) \\ &= a(2k+1) \stackrel{(3)}{=} x. \end{aligned}$$

Söz verdiğimiz gibi toplamın  $x$  olduğunu bulduk.

Sonuç olarak,  $2^n$  biçiminde yazılamayan her  $x$  sayısının en az iki ardışık sayının toplamı olduğunu bulduk. Hatta toplamamız gereken ardışık sayıları da bulduk:  $x$ 'i  $(2k+1)a$  olarak yazalım. Eğer  $a > k$  ise,  $x$ ,  $a-k$ 'den  $a+k$ 'ye kadar olan  $2k+1$  ardışık sayının toplamıdır. Eğer  $a \leq k$  ise,  $x$ ,  $k-a+1$ 'den  $k+a$ 'ya kadar olan  $2a$  ardışık sayının toplamıdır.

Şimdi  $a \leq k$  şikında, ardışık sayıları nasıl bulunduğumu göstereyim.  $x = (2k+1)a$  eşitliğini biliyoruz ve  $x$ 'i en az iki ardışık sayının toplamı olarak yazmak istiyoruz. Ardışık sayıları bildiğimizi varsayalım bir an. Diyelim bu sayılar  $b$ 'yle  $b+r$  arasındaki sayılar.  $b$ 'yle  $r$ 'yi bulmak istiyoruz.  $b$ 'yle  $b+r$  arasındaki sayıları toplarsak  $(r+1)(2b+r)/2$  buluruz. Demek ki

$$(2k+1)a = x = \frac{(r+1)(2b+r)}{2},$$

yani

$$2a(2k+1) = (r+1)(2b+r).$$

$r$ 'yi  $2a = r+1$  eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki  $r = 2a - 1$ . Bu (5) eşitliğini verir.  $b$ 'yi de  $2k+1 = 2b+r$  eşitliğini sağlayacak biçimde seçelim. Demek ki

$$2k = 2b + r - 1 = 2b + (2a - 1) - 1,$$

yani  $b = k - a + 1$ . Bu da (4) eşitliğidir.

**Yedinci Sorunun Yanıtı.**  $x$  bir asal sayı olsun. Bir an için  $x$ 'in en az üç ardışık sayının

toplamı olduğunu varsayalım, diyelim,  $x$  asalı

$$b, b+1, b+2, \dots, b+r$$

sayılarının toplamı (burada  $r \geq 2$  ve  $b > 0$ ). Bir çelişki elde edeceğiz. Aynen beşinci sorudaki gibi,

$$(2) \quad 2x = (r+1)(2b+r)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eğer  $r+1$  tekse, (2) eşitliğinden dolayı,  $r+1$  sayısı  $x$ 'i böler.  $x$  asal olduğundan,  $r+1 = x$  olmalı. Bu ve (2)'den  $2b+r = 2$  çıkar. Ama  $b > 0$  ve  $r \geq 2$ , dolayısıyla  $2b+r = 2$  eşitliği olanaksız.

Eğer  $r+1$  çiftse,  $r$  tektir.  $r$  tek olduğundan,  $2b+r$  de tektir. (2) eşitliğinden dolayı,  $2b+r$  sayısı  $x$ 'i böler.  $x$  asal olduğundan,  $2b+r = x$  olmalı. Bundan ve (2)'den,  $2 = r+1$  çıkar. Yani  $r = 1$  ve bu bir çelişkidir. Önermemiz kanıtlanmıştır.

**Sekizinci Sorunun Yanıtı.** Asal olmayan ve  $2^n$  biçiminde yazılamayan her sayı en az üç ardışık sayının toplamıdır. Bu savımızı kanıtlamak için altıncı ve yedinci soruların yanıtlarından yararlanacağız.

Eğer  $x$  en az üç ardışık sayının toplamıysa, altıncı soruya göre  $x$ ,  $2^n$  biçiminde yazılamaz ve yedinci soruya göre  $x$  asal olamaz. Şimdi bu önermenin tersini kanıtlayacağız: Eğer  $x$  asal değilse ve  $2^n$  biçiminde yazılmıyorsa,  $x$  en az üç ardışık sayının toplamıdır.

$x$ 'in asal olmadığını ve  $2^n$  biçiminde yazılamayacağını varsayalım. Demek ki öyle bir  $k \geq 1$  ve  $a \geq 2$  vardır ki,

$$x = (2k+1)a$$

eşitliği geçerlidir. Eğer  $a > k$  ise, altıncı soruda  $x$ 'in  $2k+1$  tane ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Demek ki bu durumda bir sorun yok. Eğer  $a \leq k$  ise, gene altıncı soruda  $x$ 'in  $2a$  tane (yani en az 4 tane) ardışık sayının toplamı olduğunu gördük. Bu durumda da bir sorun yok. Sorun kalmadı!