GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER (III)

Emre Alkan *

Bu yazıda yine problemler ile uğraşacağız

Problem. *Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G ve alanı S olsun. Şunu gösteriniz:*

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(|GA|\,|GB| + |GA|\,|GC| + |GB|\,|GC|).$$

Lemma. *Aynı düzlemde, doğrusal olmayan A, B, C noktaları verilsin. Düzlemde öyle bir tek P noktası vardır ki, $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ minimum olur.*

Kanıt. Genelliği bozmadan A, B, C'nin koordinatları $(0,0)$, $(1,0)$ ve (a,b) olsun. Rasgele bir (x,y) alalım. Böylece

$$\begin{aligned}&|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2\\ &= 3x^2 + 3y^2 - 2(a+1)x - 2by + a^2 + b^2 + 1\end{aligned}$$

olur. Bu ifadeyi $f(x,y)$ ile gösterelim. $\frac{2}{3}[a^2+b^2-a+1] \leq f(x,y)$ olduğunu görelim. Son eşitsizlik kolayca

$$0 \leq \left(x - \frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{3}\right)^2$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik ancak $x = (a+1)/3$ ve $y = b/3$ halinde olur. Bu noktanın ABC'nin ağırlık merkezi olduğu gözlenebilir.

Çözüm. İki ayrı duruma bakacağız: (1) ABC'nin, $2\pi/3$'ten büyük veya eşit bir açısı yoktur; (2) (1)'in tam tersi.

(1) Bu durumda ABC'nin içinde öyle bir P noktası bulunabilir ki, (i) $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \frac{2\pi}{3}$ olur; (ii) düzlemdeki herhangi bir P' için

$$|PA| + |PB| + |PC| \leq |P'A| + |P'B| + |P'C|$$

gerçeklenir. (İspat için [3]'ye bakılabilir.) A, B, C noktalarının P'ye olan uzaklıklarına sırasıyla p, q, r, G'ye olan uzaklıklarına da s, t, u diyelim. G ağırlık merkezi ise Lemma ve bu sonuç kullanılarak, $s^2 + t^2 + u^2 \leq p^2 + q^2 + r^2$ ile $p + q + r \leq s + t + u$ eşitsizlikleri elde edilir. Birinci eşitsizlikten

$$\begin{aligned}&(s+t+u)^2 - 2(st + su + tu)\\ &\qquad \leq (p+q+r)^2 - 2(pq + pr + qr)\end{aligned}$$

çıkar. Şimdi ikinci eşitsizlik kullanılarak, $pq + pr + qr \leq st + su + tu$ elde edilir.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(pq + pr + qr)$$

olacağından istenen eşitsizlik bu halde elde edilir.

(2) Genelliği bozmadan $\sphericalangle BAC \geq 2\pi/3$ kabul edelim. Şu sonucu kullanacağız: Düzlemdeki her P için

$$|AB| + |AC| \leq |PA| + |PB| + |PC|$$

olur. (İspat için [3]'ye bakılabilir.) Lemma ve bu sonuç kullanılarak $s^2 + t^2 + u^2 \leq c^2 + b^2$ ile $c + b \leq s + t + u$ eşitsizlikleri elde edilir. Bunlardan (1)'e benzer şekilde $cb \leq st + su + tu$ elde edilir. Öte yandan,

$$S = \frac{1}{2}cb\sin(\sphericalangle BAC) \leq \frac{\sqrt{3}}{4}cb$$

olacağından istenen eşitsizlik bu durumda da elde edilir.

Problem. *Bir ABC üçgeninin içinde alınan bir O noktası için, OA, OB, OC doğruları kenarları sırayla A', B', C''nde kessin.*

(i) $\frac{|AA'|}{|OA'|} = x$, $\frac{|BB'|}{|OB'|} = y$ ve $\frac{|CC'|}{|OC'|} = z$ *ise, xyz minimum olacak şekilde O noktalarını bulunuz.*

(ii) $\frac{|OA|}{|OA'|} = x$, $\frac{|OB|}{|OB'|} = y$ ve $\frac{|OC|}{|OC'|} = z$ *ise, $x^4 + y^4 + z^4$ minimum olacak şekildeki O noktalarını bulunuz.*

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

Çözüm. (i) O'dan kenarlara indirilen dikme uzunlukları h'_a, h'_b, h'_c olsun. h_a, h_b, h_c de üçgenin yükseklikleri olsun. $x = \frac{h_a}{h'_a}$, $y = \frac{h_b}{h'_b}$ ve $z = \frac{h_c}{h'_c}$ yazılabilir. S, S_1, S_2, S_3 sırayla ABC, OAB, OBC, OCA üçgenlerinin alanları olsun. Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden, $S \geq 3(S_1S_2S_3)^{1/3}$ ve böylece de $abch_ah_bh_c \geq 27\, abch'_ah'_bh'_c$ elde edilir ki bu $xyz \geq 27$ demektir. xyz'nin minimum olması için $S_1 = S_2 = S_3$, yani O noktası ABC'nin ağırlık merkezi olmalıdır.

(ii) Menelaus Teoremi'yle,

$$\frac{|A'C|}{|A'B|+|A'C|}\frac{|C'B|}{|C'A|}\frac{|OA|}{|OA'|} = 1,$$

ve böylece

$$x = \frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|C'A|}{|C'B|}\left[1+\frac{|A'B|}{|A'C|}\right] = \frac{|C'A|}{|C'B|}+\frac{|C'A|}{|C'B|}\frac{|A'B|}{|A'C|}$$

olur. Ceva Teoremi'yle $\frac{|C'A|}{|C'B|}\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|B'A|}{|B'C|}$ olduğundan, $x = \frac{|C'A|}{|C'B|} + \frac{|B'A|}{|B'C|}$ ve benzer şekilde

$$y = \frac{|A'B|}{|A'C|} + \frac{|C'B|}{|C'A|} \quad \text{ve} \quad z = \frac{|A'C|}{|A'B|} + \frac{|B'C|}{|B'A|}$$

elde edilir. $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ olduğu için $x + y + z \geq 6$ elde edilir. Öte yandan $xyz = x + y + z + 2$ olduğu gösterilebilir (bunu okuyucuya bırakıyoruz). Böylece $xyz \geq 8$ olur. Bilinen eşitsizlikler yardımıyla,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &\geq x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \\ &\geq xyz(x + y + z) \geq 48 \end{aligned}$$

elde edilir. $x^4 + y^4 + z^4$ minimum ise $x = y = z = 2$ olmalı ve yine O ağırlık merkezi olmalıdır.

(ii) için bir genelleştirme olan şunu göstereceğiz: Her $n \geq 1$ tamsayısı için, $x^{2^n}+y^{2^n}+z^{2^n}$ minimum ise O ağırlık merkezi olmalıdır.

$x, y, z > 0$ ve $xyz = x+y+z+2$ olduğunu biliyoruz.

Lemma. *$a, b, c \geq 0$ ve $a + b + c$ sabit ise $ab+ac+bc$ toplamı $a = b = c$ iken maksimumdur.*

Kanıt. a'yı sabit tutalım. $b + c$ sabit olacağından $a(b + c) = ab + ac$ sabit olur. İfadeyi büyütmek için bc en büyük yapılmalıdır. $b + c$ sabit olduğundan bu $b = c$ iken olur. a, b, c simetrik olduğundan Lemma elde edilir.

Tümevarım yapacağız. $n = 1$ için $x^2+y^2+z^2$'nin minimumunu arıyalım. $xyz = t$ koyup, Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği'yle $t - 2 \geq 3t^{1/3}$ ve böylece $xyz = t \geq 8$ elde edilir. Aynı anda $x + y + z \geq 6$ olur.

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz)$$

yazıp $x + y + z = k$ dersek, Lemma'yı kullanarak $k^2 - \frac{2k^2}{3} = \frac{k^2}{3}$'ün minimumunu ararız; bu ise açıkça $x + y + z = k = 6$ ve $x = y = z$ halinde olur. Dolayısıyla O ağırlık merkezidir. Şimdi de iddia $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n}$ için doğru olsun ve $x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}} + z^{2^{n+1}}$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} &x^{2^{n+1}} + y^{2^{n+1}} + z^{2^{n+1}} \\ &= (x^{2^n}+y^{2^n}+z^{2^n})^2 - 2(x^{2^n}y^{2^n}+x^{2^n}z^{2^n}+y^{2^n}z^{2^n}) \end{aligned}$$

ve $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n} \geq 3 \cdot 2^{2^n}$ olur. $x^{2^n} + y^{2^n} + z^{2^n} = k =$ sabit denirse, Lemma ile $k^2 - \frac{2k^2}{3} = \frac{k^2}{3}$'ün minimumu aranır. Kolayca $\frac{k^2}{3} \geq 3 \cdot 2^{2^{n+1}}$ olacağından tümevarım tamamlanır.

Problem. *a, b, c bir üçgenin kenarları olsun. $2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = abc(a+b+c)+a^4+b^4+c^4$ ise, üçgenin eşkenar olduğunu gösteriniz.*

Lemma. *Her ABC üçgeni için u yarıçevre, r ve R iç ve çevrel yarıçaplar ise,*

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{2ur}{R}$$

olur. (Kanıt okuyucuya bırakılmıştır.)

Lemma ve $R \geq 2r$ olduğu kullanılırsa, $a\cos A + b\cos B + c\cos C \leq u$ elde edilir. Bu ise kenarlar cinsinden

$$2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \leq abc(a+b+c)+a^4+b^4+c^4$$

verir. Eşitlik ancak üçgen eşkenarken vardır.

Problem. *Bir ABC üçgeninde iç ve çevrel yarıçaplar r ve R ise,*

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{5}{8}+\frac{r}{4R}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\sin\frac{A}{2} = x$, $\sin\frac{B}{2} = y$ ve $\sin\frac{C}{2} = z$ alınırsa $\frac{r}{4R} = xyz$ olur. Şu halde

$$xy + xz + yz - xyz \leq \frac{5}{8}$$

olduğu görülmelidir. $x+y+z$ sabit iken,

$$xy+xz+yz-xyz = z(x+y)+xy(1-z).$$

z'yi sabit tutalım. Böylece $z(x+y)$ sabit olur ve $xy(1-z)$ ifadesi maksimum yapılmalıdır. $1-z$ pozitif olacağından, ifade $x=y$ halinde maksimum olur. x,y,z simetrik olduğundan, ifade $x=y=z$ halinde maksimum olur. $x+y+z \leq 3/2$ olacağını okuyucu gösterebilir. Şimdi, $x+y+z \in (0,3/2]$ iken $xy+xz+yz-xyz$ ifadesinin maksimumuna bakalım. $x=y=z=k$ alarak $k \in (0,1/2]$ iken $f(k)=3k^2-k^3$'ün maksimumunu arayalım. $f'(k)$ bu aralıkta pozitif olduğu için, $f(k)$ bu aralıkta artandır. Dolayısıyla maksimumların maksimumu $x=y=z=k=1/2$ halinde olur.

Problem. *(i) Çevreleri sabit kalmak üzere, kenar sayıları artan bir düzgün çokgenler dizisinin alanlarının artan bir dizi oluşturduğunu gösteriniz.*

(ii) Alanları sabit kalmak üzere, kenar sayıları artan bir düzgün çokgenler dizisinin çevrelerinin azalan bir dizi oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm. (i) $m>n\geq 3$ olmak üzere, m ve n kenarı bulunan düzgün çokgenleri alalım. a ve b sırayla kenar uzunlukları olsun. Çevreler eşit ise $ma=nb$ yazılabilir. Alanlar için

$$A_m = \frac{1}{4}ma^2\cot\frac{\pi}{m} \quad \text{ve} \quad A_n = \frac{1}{4}nb^2\cot\frac{\pi}{n}$$

doğrudur. $A_n < A_m$ olduğunu görmek yeterli olacaktır.

$nb^2\cot\frac{\pi}{n} < ma^2\cot\frac{\pi}{m}$ eşitsizliği, $a^2 = n^2b^2/m^2$ olduğunundan, $m\tan\frac{\pi}{m} < n\tan\frac{\pi}{n}$ eşitsizliğine eşdeğerdir. Bunu görebilmek için $f(x) = x\tan\frac{\pi}{x}$'in azalan olduğunu görelim. $f'(x) = \tan\frac{\pi}{x} - \frac{\pi/x}{\cos^2(\pi/x)} < 0$ olduğunu görmek için, $\sin\frac{2\pi}{x} < \frac{2\pi}{x}$ olduğu görülmelidir ki bu bilinen $\sin\alpha < \alpha$ eşitsizliğidir ($0<\alpha$ için).

(ii) Okuyucuya bırakılmıştır.

Problem. *R yarıçaplı bir çemberin içine iki eşkenar üçgen çiziliyor. Eşkenar üçgenlerin ortak alanı S olsun. $2S \geq R^2\sqrt{3}$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. Şekil çizilirse eşkenar üçgenlerin kesişimlerinden oluşan altı üçgenin eş oldukları göz-lenir. Bunun sonucu olarak bu üçgenlerin çevreleri sabittir ve eşkenar üçgenin bir kenarına yani $R\sqrt{3}$'e eşittir. Çevreleri sabit üçgenler arasında maksimum alanlı eşkenar üçgendir. Bunu görmek için kenarların birini sabit tutarız; diğer köşe bir elips üzerinde hareket eder ve alan diğer iki kenar eşitken en büyük olur. Kenarlar simetrik olduğundan iddia doğrulanır. Üçgenlerden birinin alanı T ise, $3T \leq R^2\sqrt{3}/4$ yazılabilir. $S = 3\sqrt{3}R^2/4 - 3T$ olduğundan istenen eşitsizlik elde edilir.

Düzeltmeler. [1]'deki Problem 2'nin yayımlanan çözümünden daha kısa bir çözüm şöyle verilebilir: Sözü geçen uzunlukların en az biri r'den küçük veya eşit olmalıdır. Şu halde $r \leq 12^{-3/4}(\frac{abc}{r})^{1/2}$ olduğunu görmek yeter. Bu ise $24\sqrt{3}r^3 \leq abc$ demektir. r sabit tutulurken, üçgen eşkenarsa abc minimum olmaktadır. Son eşitsizliğin doğruluğu açıktır. Böylece problemi iyi kuramamış olduğumuzu anlıyoruz. Yaptığım çözümün gidişine uygun problem şu olmalıdır:

Problem 2′. *a,b,c bir üçgenin kenarları olmak üzere, $|B_3C_1|\,|B_1C_2|\,|B_2C_3| \leq \frac{\sqrt{3}}{72}abc$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. Şunları göstermiştik:

$$|B_3C_1|\,|B_1C_2|\,|B_2C_3| = |B_3C_2|\,|B_1C_3|\,|B_2C_1|,$$

$$|B_1C_3|\,|B_2C_3|\,|B_2C_1|\,|B_3C_1|\,|B_3C_2|\,|B_1C_2| \leq \frac{(abc)^2}{3^3 4^3}.$$

İstenen bunlardan elde edilir.

[2]'deki Problem 5 iyi kurulmamış bir problem. Çözümde $\sum\frac{1}{p}$'nin ıraksaklığını kullanmak gereksiz. Onun yerine şu problem daha uygun olabilir:

Problem 5′. *$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}$ dizisini ele alalım. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Yeterince büyük her m tamsayısı için $[m-\varepsilon, m)$ aralığında a_n dizisinin en az bir terimi vardır.*

Çözüm. n yeterince büyük ise $a_{n+1} - a_n < \varepsilon$ olacağı gözlenebilir. Şu halde m yeterince büyük bir tamsayı ise, $\{a_n\}$ ıraksak olduğundan, $a_n < m-\varepsilon$'dur $a_{n+1} \geq m$ gibi bir durum olamaz. Öte yandan, a_n dizisinin hiç bir teriminin tamsayı olmadığını görmek kolaydır. Böylece $[m-\varepsilon, m)$ aralığına dizinin bir terimi düşer.