Düzlemde Kompleks Sayılarla Analitik Geometri

Hasan Basri Özdemir *

Düzlemde bilinen analitik geometri konularının bir kısmı, düzlem ile ($\mathbb{R}^2$), küme olarak ve vektör uzayı olarak aynı olan kompleks sayılar kümesinin ($\mathbb{C}$) elemanları ile daha kolay anlaşılmakta ve anlatılabilmektedir.

Bu konu dergimizin 1992 yılı, 2. cilt 2. sayısında sayın Hüseyin Demir hocamız tarafından ele alınmıştı.

Düzlemin, yani $\mathbb{R}^2$ nin bir (x,y) noktası,

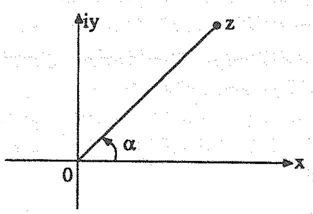
$$z = (x,y) = x + iy$$

veya trigonometrik gösterim denilen

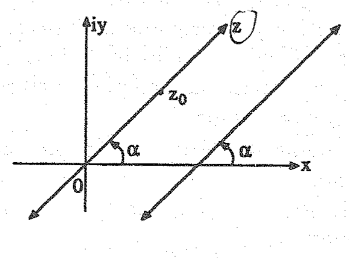
$$z = |z|Cis\alpha$$

şeklinde $z \in \mathbb{C}$ noktası ile gösterilir. Burada $Cis\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Noktanın orijine uzaklığı olan bu $|z|$ değerine z kompleks sayısının (düzlemin (x,y) noktasının) **modülü** denir. α açısına noktanın **esas argümenti** (veya sadece argümenti) denir. $(0 \le \alpha \le 2\pi)$. Düzlemin bu $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ noktasının kutupsal gösterimi, $z = (r,\alpha)$ şeklindedir. ($r = |z|$), z noktasının üstel gösterimi ise $z = re^{i\alpha}$ şeklindedir.

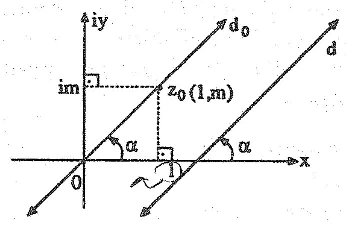
Bir noktanın argümentine bu noktanın **eğim açısı**, bu açının tanjantınada bu noktanın **eğimi** denir.



Bu tanıma göre verilen bir z_0 noktasında ve orijinden geçen bir doğrunun ve bu doğruya paralel her doğrunun eğimi bu z_0 noktasının eğimidir.

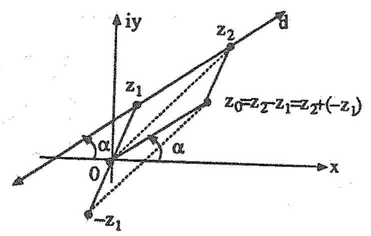


Eğimi m olan ($m \in \mathbb{R}$) bir d doğrusunun eğimi, $z_0 = (1,m)$ noktasının eğimi olur.



$$m = \tan\alpha, d \parallel \overline{oz_0}$$

Düzlemde verilen iki z_1, z_2 noktalarının farklı olan nokta (kompleks sayı), $z_0 = z_2 - z_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ noktasıdır. ($z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$) z_1, z_2 noktaları arasındaki uzaklık, $|z_0| = |z_2 - z_1|$ olur. Verilen z_1, z_2 noktalarından geçen doğrunun eğiti, $z_0 = z_2 - z_1$ noktasının eğimi olur. Çünkü $d \parallel \overline{oz_0}$



* Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Öğretim Üyesi

Çember

Orijin merkezli, r yarıçaplı çember denklemi, $z \in \mathbb{C}$ noktasının orijine uzaklığı r olmak üzere $(r \in \mathbb{R}^+)$,

$$Ç = \{z \mid |z| = r\} = \{z \mid z\overline{z} = r^2\}.$$

Sabit bir s_0 merkezli, r yarıçaplı $(r \in \mathbb{R})$ çember denklemi,

$$Ç = \{z \mid |z - z_0| = r\} = \{z \mid z - z_0|) = r^2\}$$

Düzlemde karteziyen koordinatlarla bir çemberin denklemi,

$$A(x^2 + y^2) + B_1 x + B_2 y + c = 0$$

idi. $(A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}, A \neq 0)$. Burada $z = x+iy$ olmak üzere,

$$x = \tfrac{-1}{2}(z+\overline{z}), y = \tfrac{1}{2i}(z-\overline{z}), z\overline{z} = x^2 + y^2$$

olacağı için, yerine konursa,

$$Az\overline{z} + \tfrac{1}{2}(B_1 - iB_2)z + \tfrac{1}{2}(B_1 + iB_2)\overline{z} + C = 0$$

bulunur. $\frac{1}{2}(B_1 - iB_2) = B$ dersek, denklem

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$$

olur. Bu denklemi,

$$(z + \tfrac{\overline{B}}{A})(\overline{z} + \tfrac{B}{A}) = \tfrac{B\overline{B} - AC}{A^2}$$

şeklinde, veya

$$|z - \tfrac{-\overline{B}}{A}|^2 = \tfrac{B\overline{B} - AC}{A^2} = r^2$$

şeklinde yazabiliriz. Merkez $z_0 = -\frac{\overline{B}}{A}$ noktası, yarıçap r dir. $B\overline{B} - AC < 0$ ise sanal çember olur.

Burada önemle vurgulanması gereken şudur: $z\overline{z}, z, \overline{z}$ cinsinden, bunlara göre lineer her denklem bir çember denklemi değildir. Çember denklemi olması için, $z\overline{z}$'nin katsayısı (A) ve sabit terim (C) reel sayılar, z ile $\overline{z}$ in katsayıları $(B, \overline{B})$ birbirinin eşleniği, $A \neq 0$ olmalıdır veya bu şekle getirilebilmelidir. Örneğin,

$$\{z \mid z\overline{z} + 2z + 3\overline{z} + 5 = 0\}$$

bir çember değildir. Çünkü $\overline{2} = 2 \neq 3$. Peki bu denklem neyin denklemidir? $z = x + iy$ koyarak,

$$(x+iy)(x-iy) + 2(x+iy) + 3(x-iy) + 5 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5x + 5 - iy = 0 = (0, 0)$$

$$x^2 + y^2 + 5x = 0 \text{ ve } -iy = 0,$$

buradanda

$$y = 0, x^2 + 5x + 5 = 0$$

elde edilir.

Denklemden gerçel kök bulunamadığı için verilen küme boş kümedir. Eğer denklemden gerçel x değeri bulunabilseydi verilen küme gerçel eksen üzerinde (ox ekseni) denklemin köklerine karşılık gelen iki noktadan ibaret olurdu.

Doğru

Çemberin z ye bağlı denklemi,

$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$ $(A \neq 0, A$ ve C gerçel sayılar) idi. $A = 0$ iken geri kalan,

$$Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$$

doğru denklemidir. $(C \in \mathbb{R})$

Burada da vurgulanması gereken şudur: z ve $\overline{z}$ değerlerine bağlı lineer her denklem bir doğru denklemi değildir. z ile $\overline{z}$ nin katsayıları birbirinin eşleniği ve sabit terim gerçel sayı olmalıdır veya bu şekle getirilebilmelidir. Örneğin,

$$\{z \mid 3z + 5\overline{z} + 2 = 0\}$$

bir doğru denklemi değildir. Çünkü $\overline{3} = 3 \neq 5$. O halde bu ne denklemidir? $z = x + iy$ koyarak,

$$3(x + iy) + 5(x - iy) + 2 = 0$$

$$8x - 2iy + 2 = 0,\ 8x + 2 - 2iy = (0, 0)$$

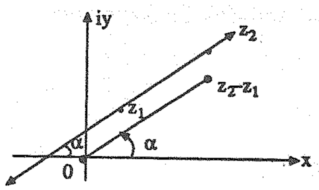
$$8x + 2 = 0, -2y = 0 \Rightarrow x = -\tfrac{1}{4}, y = 0$$

O halde bu küme,

$$\{z \mid 3z + 5\overline{z} + 2 = 0\} = \{(-\tfrac{1}{4}, 0)\}$$

şeklinde reel eksen üzerinde tek bir noktadan oluşmaktadır.

Verilen iki noktadan geçen doğru denklemi



Verilen noktalar z_1, z_2 ise, $z - z_1 = k(z_2 - z_1)$, $(k \in \mathbb{R})$

$$\overline{z} - \overline{z}_1 = (\overline{z}_2 - \overline{z}_1)$$

Bu ikisinden

$$\frac{z - z_1}{\overline{z} - \overline{z}_1} = \frac{z_2 - z_1}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}$$

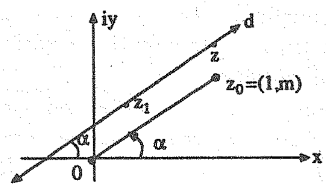
$$(\overline{z}_2 - \overline{z}_1)z - (z_2 - z_1)\overline{z} + z_2\overline{z}_1 - \overline{z}_2 z_1 = 0$$

bulunur.

Not: Her iki taraf i ile çarpılarak denklemin, $Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$, $(C \in \mathbb{R})$ şartını sağladığı görülür.

Bir noktası ve eğimi verilen doğru denklemi

Nokta z_1 ve eğim m ise $(m \in \mathbb{R})$, $m = \tan\alpha$, $d \parallel oz_0$ olduğundan,



$z - z_1 = kz_0$

$\overline{z} - \overline{z}_1 = k\overline{z}_0$

$\frac{z-z_1}{\overline{z}-\overline{z}_1} = \frac{z_0}{\overline{z}_0}$

$\overline{z}_0 z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z}_1 - \overline{z}_0 z_1 = 0$ elde edilir.

Not: Yine her iki taraf i ile çarpılarak, $Bz + \overline{Bz} + C = 0$, $(C \in \mathbb{R})$ şartının sağlandığı görülür.

Orijinden geçen doğru denklemide,

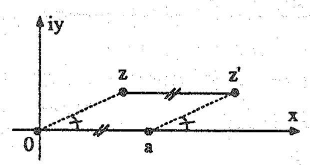
$\overline{z}_0 z - z_0\overline{z} = 0$ olur.

Dönüşümler

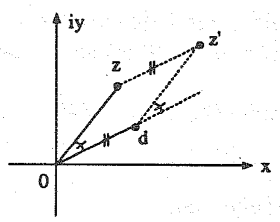
Düzlemdeki, yani $\mathbb{R}^2$ den $\mathbb{R}^2$ ye dönüşümler, kompleks sayılarla yani $f : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$, $z' = f(z)$ olarak ele alındığında, düzlemin karteziyen koordinatlarla bilinen dönüşümlerine göre yine kolaylık ve sadelik görülmektedir.

Öteleme ve dönme dönüşümü

Öteleme dönüşümü, $f : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z' = z + a$ şeklinde idi. Eğer $a \in \mathbb{R}$ ise bu reel eksene parelel $|a|$ kadarlık bir kaymadır.



$a \in \mathbb{C}$ ise bu dönüşüm her noktayı oa doğrusuna parelel olarak $|oa|$ kadar kaydırır.



Bu dönüşümle oa doğrusuna parelel doğrular sabit kalır, diğer doğruların görüntüleri kendilerine paralel olur.

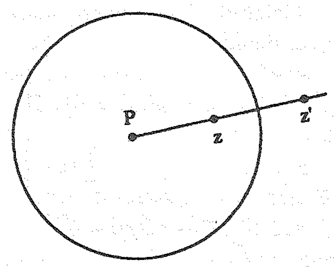
$Ç = \{z||z| = r, r > 0\}$ merkezcil çemberi, ve dönüşüm, $z' = z + a$, ve buradanda, $z = z' - a$ olacağından, $f(Ç) = \{z||z-a| = r\}$ olur. Merkez a noktasına ötelenmiştir.

Bir α açılık dönme dönüşümü,

$z' = f(z) = z_0 z = e^{i\alpha} z$ şeklindedir. ($z_0 = e^{i\alpha}$, $|z_0| = 1$). Bu dönüşüm her notayı orijin etrafında α açısı kadar döndürür.

Bir çembere göre evirtim

Düzlemde P merkezli ve r yarı çaplı çembere göre **evirtim** $|Pz||Pz'| = r^2$ olarak tanımlanır. z ve z' noktalarına **birbirinin evriği** denir.



$Az\overline{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0$, $(A, C \in \mathbb{R}, A \neq 0)$ çemberine göre evirtim f olsun. $z' = f(z)$ olmak üzere

$Az'\overline{z} + Bz' + \overline{Bz} + C = 0$, $z' = \frac{-\overline{Bz}-C}{A\overline{z}+B}$

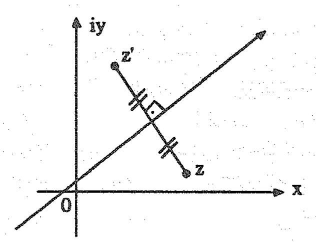
olur.

Yansıma (simetri)

$Az\overline{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0$ çember denkleminde $A = 0$ iken doğru denklemi elde edilir.

$Bz + \overline{Bz} + C = 0$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü, $z' = f(z)$ olmak üzere,

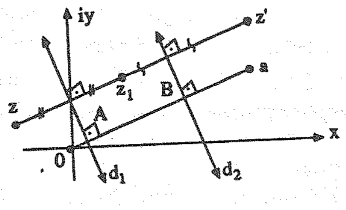
$Bz' + \overline{Bz} + C = 0$, $z' = -\frac{\overline{B}}{B}\overline{z} - \frac{C}{B}$ olur.



Genel olarak genişletilmiş karmaşık düzlemin ($\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) otomorfizmaları, $T : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \frac{az+b}{bz+c}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc = 1)$ şeklindedir. Bu dönüşümlerin kümesi bileşke işlemi ile bir gruptur. Bu guruba $PSL(2, \mathbb{C})$ veya Möbius grubu denir. Bu grubun her öğesi çift sayıda evirtimin (çembere göre veya doğruya göre) bileşkesi olarak yazılabilmekte ve böylece bir öğenin bütün özellikleri kolayca gözlenebilmektedir. Örnek olarak ötelemeyi ele alalım.

Teorem Öteleme iki yansımanın

bileşkesidir.



Kanıt $f : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}$, $z' = f(z)$, $z' = z + a$, ($a \in \mathbb{C}$ ve sabit) şekildeki oa doğrusuna dik olarak çizilen d_1 ve d_2 doğrularına göre yansımalar sıra ile f_1 ve f_2 olmak üzere $f = f_2 f_1$ olur. ($|AB| = \frac{1}{2}|a|, f_2 f_1 = f_2 o f_1$, $z_1 = f_1(z), z' = f_2(z_1) = f_2 f_1(z)$)

Möbius grubunu biraz daha yakından tanıyalım.

Teorem Möbius grubunun $PSL(2,\mathbb{R})$ alt grubu ($PSL(2,\mathbb{R}) = \{T | T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1\}$) üst yarı düzlemi ($\{z = x+iy | y > 0\}$) ve ekseni ($\{z = x + iy | y = 0\}$) sabit bırakır.

Bunların kanıtı okuyucu tarafından kolayca görülebilir.

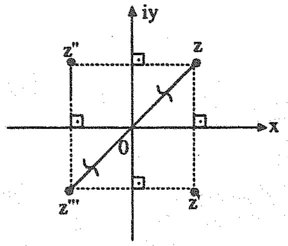
Möbius grubunun öğeleri konform dönüşümlerdir, çemberi yine çembere resmederler (doğruda yarıçapı sonsuz olan bir çember olarak düşünülür), genel olarak uzunluk ve alanı korumazlar. Fakat aşağıdaki teorem bir istisnayı belirtmektedir.

Teorem: Möbius grubunun öğeleri, **eşmetri çemberleri** üzerinde ($(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ için eşmetri çemberi, $|cz + d| = 1$ çemberidir.) uzunluğu korurlar.

Kanıt Eşmetri çemberine E diyelim. $z_1, z_2 \in E$ olsun. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $|T(z_1) - T(z_2)| = |\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}| = |\frac{(ad-bc)z_1-(ad-bc)z_2}{(cz_1+d)(cz_2+d)}| = |z_1 - z_2|$ bulunur. ($ad - bc = 1, |cz_1 + d| = 1, |cz_2 + d| = 1$)

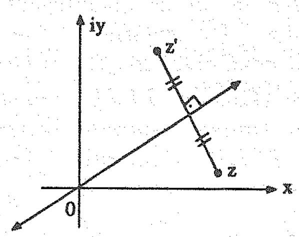
Örnekler Son olarak birkaç basit örnek verip, kompleks sayılarla çalışmanın kısalığını ve sadeliğini görerek yazımızı bitirelim.

1. ox ve oy eksenlerinin denklemi sıra ile, $z - \overline{z} = 0, z + \overline{z} = 0$ ve bunlara göre yansıma dönüşümleri yine sıra ile $z' = f_1(z), z'' = f_2(z)$ olmak üzere $z' = \overline{z}$, $z'' = -\overline{z}$, **orijine göre simetri dönüşümü de** bu ikisinin bileşkesi olarak, $z''' = f_1 o f_2(z)$, $z''' = -z$ olur.



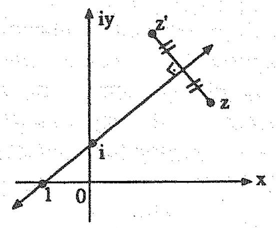
2. Orijinden geçen bir doğruya göre simetri dönüşümü, doğru denklemi,

$\overline{z}_0 z = z_0 \overline{z} = 0$ olduğundan, $z' = f(z)$ olmak üzere,



$\overline{z}_0 z' - z_0 \overline{z} = 0$, $z' = \frac{z_0}{\overline{z}_0}\overline{z}$ olur.

3. $(1 + i)z + (1 - i)\overline{z} + 2 = 0$ doğrusuna göre yansıma dönüşümü, $z' = f(z)$ ise $(1+i)z' + (1 - i)\overline{z} + 2 = 0$, $z' = -\frac{1-i}{1+i}\overline{z} - 1 + i$ olur.



4. Birim çembere göre evirtim dönüşümünü bulalım.

$|z| = 1, z\overline{z} = 1$ ve evirtim dönüşümü formülünden, $z' = f(z)$ olmak üzere,

$z'\overline{z} = 1$, $z' = \frac{1}{\overline{z}}$ bulunur.

5. $z' = f(z) = -\frac{1}{z}$ olmak üzere bu f dönüşümü Möbius grubunun bir öğesidir ve birim çembere göre evirtim ($f_1(z) = \frac{1}{\overline{z}}$) ile sanal ekse göre yansımanın ($f_2(z) = -\overline{z}$) bileşkesidir, $f = f_2 f_1$.