ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A101. ABC üçgeninde BR ve CS sırasıyla AC ve AB kenarlarına ait yüksekliklerdir. $\frac{|SR|}{|BC|} = \cos A$ olduğunu gösteriniz. (C.Alparslan Ertuğ)

A102. ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 30°$ ve $\widehat{ACB} = 40°$ dir. AC kenarı üzerinde $\widehat{MBC} = 20°$ olacak şekilde bir M noktası ve BM doğrusu üzerinde de $\widehat{OCB} = 10°$ olacak şekilde bir O noktası alınıyor. O'dan BC'ye çizelen dikme AB'yi N noktasında kestiğine göre $\widehat{NMD}$ yi bulunuz. (Dinçer Güler)

A103. Bir dikdörtgenin paralel iki kenarının her biri m eşit parçaya bölünüp karşılıklı noktalar birer doğru parçası ile birleştirilip m tane dikdörtgen elde ediliyor. Bu şekilde, uç noktaları köşeler olan, **çizilmiş** bütün doğru parçalarının sayısını bulunuz. Bu sayının tam kare olup olmadığını araştırınız. (Hüseyin Demir)

A104. $p(x)$ bir polinom ve $q(x) = p(x)+1$ olsun. $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ polinomunun $p(x)q(x)$ ile bölünebildiğini gösteriniz. (M. Şahin)

A105. ABC üçgeni içinde bir P noktası alınıyor. BPC, CPA, APB üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları sırası ile R_x, R_y, R_z ise

$$A(ABC) \leq \frac{3}{4}\sqrt{RR_xR_yR_z}$$

olduğunu ve eşitlik için üçgenin eşkenar olması gerektiğini gösteriniz. (Dinçer Akay)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y101. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \int_0^x te^t dt}{e^x \sin x - \int_0^x e^t \sin t dt}$ limitini hesaplayınız. (Hasan Kullap)

Y102. $ABCD$ karesinin BC kenarı üzerinde $\widehat{BAE} = 7.5°$ olacak şekilde E noktası işaretleniyor. $\tan(\widehat{ADE})$ yi hesaplayınız. (Cuma Arslan)

Y103. ABC üçgeninde iç teğet çember BC, AC, AB kenarlarına sırası ile K, M, L noktalarında değmektedir. Bu kenarların orta noktaları da sıra ile P, R, S dir. KP, MR ve LS doğru parçalarının orta noktaları da X, Y, Z ise

$$\frac{Alan(XYZ)}{Alan(ABC)} = \frac{3R+2r}{16R}$$

olduğunu gösteriniz. (R: çevrel çemberin yarıçapı; r:içteğet çemberin yarıçapı) (Ergün Yaraneri)

Y104. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(x + n^2 + h) = \varphi(x - h^2 - h) + \frac{4xh}{x^2 + 1995}$$

eşitliği sağlanıyor. $\varphi(0) = 0$ ise $\varphi(1)$ değerini hesaplayınız. (M. Şahin)

Y105. ABC üçgeninin AC kenarı üzerinde $|AE| = |EF| = |FG| = 2$, $|GC| = 6$ olacak şekilde E, F, G noktaları işaretleniyor. AB kenarı üzerinde de $|AD| = 3$ ve $|DB| = 5$ olacak şekilde D noktası işaretleniyor. $m\widehat{GDC} = m\widehat{EBF}$ olduğunu gösteriniz. (Ergün Yaraneri).

ÇÖZÜMLER

A91. Kareyi, her kenarı $\frac{23}{7}$ birim olan 49 küçük kareye ayıralım. $99 > 2 \times 49$ olduğundan, bu karelerin en az birinin içinde en az üç nokta bulunacaktır. Bu küçük karenin içindeki herhangi iki nokta arasındaki mesafe $\frac{23}{7}\sqrt{2}$ den küçük (veya eşit) olacağından bu karenin içinde bulunan bir üçgenin S çevresi için $s \leq 3 \times \frac{23}{7}\sqrt{2} < 14$ yazılabilir.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Aliekber Gürel, Levent Koçoğlu.*)

A92. $\cos A + \cos B = \frac{1}{2}\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$ olduğunu hatırlayarak:

$$\begin{aligned}
& \cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 \\
= \; & (\cos 3x + \cos x) - (\cos 2x + 1) \\
= \; & \frac{1}{2}(\cos 2x \cos x) - \frac{1}{2}\cos^2 x \\
= \; & \frac{\cos x}{2}(\cos 2x - \cos x) \\
= \; & \frac{\cos x}{2}(2\cos^2 x - \cos x + 1) \\
= \; & \frac{1}{2}\cos x(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $(0,2\pi)$ aralığındaki çözüm takımı da $\{\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2},\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{2}\}$ olarak elde edilir.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Mustafa Alkan, Cuma Arslan, Atasağun Baykal, Rıza Tamer Çakıcı, Alper Çay, Erek Göktürk, Levent Koçoğlu, Ali Işıtan, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Erol Ünal, Ergün Yaraneri.*)

A93. $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=1$ denkleminden yola çıkarak $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=1$ yazılabilir. $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{1}{3}$ ise, $3\sin^2 x\cos^2 x=\frac{2}{3}$ veya $9\cos^2 x(1-\cos^2 x)=2$ denklemi bulunur. Sadeleştirme ile, $9\cos^4 x-9\cos^2 x+2=(3\cos^2 x-1)(3\cos^2 x-2)=0$ bulunur. Yani $\cos^2 x=\frac{1}{3}$ veya $\cos^2 x=\frac{2}{3}$ olmalıdır. Dolayısı ile $\cos x=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}$ veya $\cos x=\mp\frac{\sqrt{6}}{3}$ olmalıdır.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Mustafa Alkan, Atasağun Baykal, Murat Hikmet Beybağa, Alper Çay, Erek Göktürk, Seyhan Kesim, Levent Koçoğlu, Ali Işıtan, Ülkü Öztaş, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Ergün Yaraneri.*)

A94. Atılan beş zarın toplamının, çarpımdan büyük veya eşit olduğu haller:
11111 (1 kombinasyon), 11112 (5 kombinasyon),
11113 (5 kombinasyon), 11114 (5 kombinasyon),
11115 (5 kombinasyon), 11116 (5 kombinasyon),
11122 (10 kombinasyon), 11123 (20 kombinasyon),
11124 (20 kombinasyon), 11125 (20 kombinasyon),
11133 (10 kombinasyon), 11222 (10 kombinasyon)
olarak listelenebilir. Toplam olarak 116 kombinasyonda atılan zarların toplamı çarpımından büyük veya eşit olmaktadır. Aradığımız olasılık (toplamın çarpımdan küçük olması olasılığı) 5 zarın atılması ile tanımlı uzayın büyüklüğü 6^5 olduğu için $1-\frac{116}{6^5}=\frac{7660}{7776}=\frac{1915}{1944}$ olarak bulunur.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Alper Erbakan, Aliekber Gürel, Seyhun Kesim, Ruhi Tabur, Ergün Yaraneri.*)

A95. Orijinden ve $p,q\in\mathbb{Z}$, olmak üzere (p,q) koordinatlı bir noktadan geçen doğrunun eğimi $\frac{q}{p}$ $(p\neq 0)$ rasyonel sayısına eşit olur. Her doğru bir örgü noktasından geçseydi bütün doğruların eğiminin rasyonel olması gerekirdi. Sonuç olarak, eğimi irrasyonel bir sayı olan bir doğru orijin dışında hiç bir örgü noktasından geçmez.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Atasağun Baykal, Rıza Tamer Çakıcı, Erol Çevikli, Erek Göktürk, Aliekber Gürel, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Ergün Yaraneri.*)

Y91. (Düzeltilmiş şekli) ABC, kenar uzunlukları a,b,c ve alanı S olan bir üçgen olsun. b,c; c,a ve a,b çiftlerinin aritmetik ortalamalarına sırasıyla a_1,b_1,c_1 diyelim. Kenar uzunlukları a_1,b_1 ve c_1 olan bir $A_1B_1C_1$ üçgeninin varlığını gösterip ABC ve $A_1B_1C_1$'in S ve S_1 alanları arasında $S_1\geq S$ bağıntısının bulunduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Üçgen eşitsizliklerinden herhangi birini, örneğin $a_1<b_1+c_1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$a_1<b_1+c_1 \Longleftrightarrow \frac{b+c}{2}<\frac{a+c}{2}+\frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow a>0.$$

İki üçgenin çevre uzunluklarının eşitliğinden ($u=u_1$);

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{u_1(u_1-a_1)(u_1-b_1)(u_1-c_1)} \\ &= \sqrt{u\frac{abc}{8}}=\sqrt{u\frac{4Rs}{8}}=\sqrt{ur\frac{RS}{2r}} \\ &= S\sqrt{\frac{R}{2r}}\geq S. \end{aligned}$$

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Erol Gedikli.*)

Y92. Çözüm: a) D'nin AB üzerindeki ayağı L, karenin AC ve AB üzerindeki köşeleri E ve F olsun. DLF (bilinmeyen) dik üçgenin D etrafında, pozitif yönde 90° döndürüldüğünde $[DL]$ doğru parçası $[DL']$ konumuna gelsin. Bu durumda LF doğru parçası $[L'E]$ durumuna gelir ve çizim E köşesini belirler. Böylece, kare belirlenmiş olur.

b) Karenin kenar uzunluğu x ve $DL'\cap AC=B'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x^2 &= |L'D|^2+|L'E|^2=|LD|^2+(|L'B'|\tan B)^2 \\ &= (\frac{a}{2}\sin B)^2+(\frac{a}{2}\sin B+\frac{c}{2})^2\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x^2\cos^2 A &= (a^2\sin^2 B\cos^2 A)+ \\ &+ a^2\sin^2 B\sin^2 A+ \\ &+ 2ac\sin B\sin^2 A+c^2\sin^2 A \\ &= a^2\sin^2 B+c^2\sin^2 A+ \\ &+ 2ac\sin B\sin^2 A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{4R^2 4x^2\cos^2 A}{a^2}=b^2+c^2+\frac{2abc}{2R}$$
$$\Rightarrow x=\sqrt{b^2+c^2+4S}\tan A.$$

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Atasağun Baykal, Murat Aygen.*)

Y93.

(i) 1 numaralı tüpü önce k numaralı tüple sonra da $i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüplerle paralel bağlarsak, basınç $(\frac{P_1+P_2}{2} + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t})/(t+n)$ olacaktır. Önce $i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüplerle sonra k numaralı tüple bağlarsak basınç $[\frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_t}}{(t+1)} + P_k]/2$ olur. İkinci haldeki basıncın daha büyük olduğunu göstermek için

$$P_n + P_{i_t} + \cdots P_{i_t} + (t+1)P_k > P_1 + 2(P_{i_t} + \cdots P_{i_t}) + P_k$$

veya eşdeğer olarak

$$tP_k > P_{i_1} + \cdots P_{i_t}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $P_k > P_{i_1}, \cdots P_{i_t}$ oludğu için tabii olarak $tP_k > P_{i_1} + \cdots P_{i_t}$ eşitsizliği doğrudur.

(ii) 1 numaralı tüp ile $i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüplerin ve k-numaralı tüpün paralel bağlanması halinde ortak basınç $\frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t} + P_k}{t+2}$ olacaktır. Öte yandan önce $1,\ i_1, \cdots, i_t$ numaralı tüpleri paralel bağlayıp daha sonra 1 numaralı tüp, k numaralı tüp ile bağlanırsa basınç

$$(\frac{P_1 + P_{i_t} + \cdots P_{i_t}}{t+1} + P_k)/2$$

$$= \frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_t} + (t+1)P_k}{2(t+1)}$$

olur. $P_k > \frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t}}{(t+1)}$ olduğundan,

$$(t+1)P_k > t(P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t})$$

$$\Rightarrow [(t+1)(t+2) - 2(t+1)]P_k >$$

$$[2(t+2) - (t+2)](P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{ik})$$

$$\Rightarrow (t+2)(P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t}) + (t+1)(t+2)P_k >$$

$$2(t+1)(P_1 + P_{i_1} + \cdots + P_{i_t}) + 2(t+n)P_k$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_t} + (t+1)P_k}{2(t+1)} >$$

$$\frac{P_1 + P_{i_1} + \cdots P_{i_k} + P_k}{t+2}$$

bulunur. Buradan çıkan sonuç, 1 numaralı tüpün basıncı, $1, 2, \cdots, k-1$ numaralı tüplerden oluşan sistem içinde maksimum yapıldıktan sonra, k numaralı tüple bağlanmalıdır. Benzer olarak bu sistem içinde de $k-1$ numaralı tüp en sona bırakılmalıdır. Bu şekilde devam edersek, 1 numaralı tüpün önce 2, sonra 3, $\cdots$ ve nihayet k numaralı tüple bağlanması halinde basıncının maksimum yapılabileceği anlaşılır. Bu halde de basınç $\frac{P_1 + P_2 + 2P_3 + 4P_4 + \cdots + 2^{k-2}P_k}{2^{k-1}}$ olarak elde edilir.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Murat Aygen, Atasağan Baykal, Aliekber Gürel, Osman Nuri Okumuş.*)

Y94. Euler formülünü kullanarak, oniki yüzlünün 18 kenarı ve 8 köşesi olduğunu buluruz. V_1 ve V_2 ile, üç ve altı kenarın buluştuğu köşelerin sayısını gösterelim. $V_1 + V_2 = 8$, $3V_1 + 6V_2 = 2 \times 18$ denklemlerinden $V_1 = V_2 = 4$ olduğu bulunur. Üç kenarın birleştiği köşelere A, B, C, D diyelim. Bütün yanal açılar aynı olacağından, A köşesinde buluşan, diyelim ki AE, AF ve AG, kenarları hep aynı uzunlukta olmalıdır. $AE = AF = AG = x$ kabul edelim. (Eğer $x = AE = AF + AG = y$ olsaydı AEF, AFG ve AGE'nin ikizkenar olmasının sebebi ile $\widehat{EPF} \neq \widehat{FAG}$ olurdu.) E, F ve G'de altışar kenar buluşmaktadır. Altı kenarın buluştuğu diğer köşe de H ise $EFGH$'nin y-kenarlı düzgün dörtyüzlü ve A, B, C ve D nin de bu dörtyüzlünün yüzlerine inşa edilmiş ikiz kenar piramitlerin tepeleri olduğu anlaşılır. A, B, C den geçen düzlem EF, HF ve GF yi E', H' ve G' de kesiyor olsun. Bu durumda $AE'BH'CG'$ bir düzgün altıgen olur. $x = FA = FE'$, olduğundan, $A'Z'F' = x$ ve $AE' = \frac{x}{\sqrt{3}}$ olur. AEF ve FAE' ikizkenar üçgenlerinden de $\widehat{EFA} = \alpha$, $\frac{y}{2x} = \cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$, $\frac{x}{2x\sqrt{3}} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \sin(\frac{\alpha}{2})$ ve $\frac{y}{x} = \frac{5}{3}$ olduğu görülür.

Y95. Çözüm: ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin kenar uzunlukları ve alanları a, b, c a', b', c', s, s' olmak üzere, $4R'S' = a'b'c'$ ve $S' = 7S$ olduğunu hatırlayalım. Kosinüs teoreminden

$$a'^2 = 5^2 + 6^2 + 2.5.6.\cos c = 97,\ b'^2 = 73,$$

$c'^2 = 180$ olup; $R' = \frac{a'b'c'}{4S'} = \frac{\sqrt{97}\sqrt{73}6\sqrt{5}}{4.7.6} = \frac{\sqrt{5.73.97}}{28}$.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Murat Aygen, Atasağun Baykal, Erol Gedikli, Erek Göktürk, Aliekber Gürel, Ali Işıtan, Ruhi Tabur, Ali Tombak, Erol Ünal, Ülkü Öztaş, Özgür Saygı, Ramazan Yaşar.*)