

52.  $A = \int_{\frac{\pi}{12}}^a -2(\sin^4 x - \cos^4 x)dx = \frac{1}{2}$   
ise  $a = ?$

**Çözüm:**  $A = \int_{\frac{\pi}{12}}^a -2(\sin^2 x -$

$\cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int_{\frac{\pi}{12}}^a 2 \cos 2x dx =$   
 $\sin 2a - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Bu da  $\sin 2a = 1$  veya  $2a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  veya  
 $a = \frac{\pi}{4} + k\pi$  verir.

## PROBLEMLER İLE EĞLENELİM (Mİ?)

Şafak Alpay \*

Size ilgileneceğinizi umduğum bazı problemler sunuyorum. Tatilin geri kalan kısmı ve dersleriniz kızıışmadan uğraşmanız dileği ile hepimize mutlu yıllar!

- 1994'de 5 Nisan salı gününe gelmişti. Acaba hangi yılda 5 Nisan yine bir salı gününe gelecek?
- $N$  tam sayısı için  $M$ ,  $N$ 'nin basamaklarını ters sırada yazarak elde ettiğimiz sayı olsun. Örneğin  $N = 6923$  ise  $M = 3296$  olur.  $N - M$ 'nin 9 ile bölünebileceğini gösteriniz.
- $x^3 - kx - 1 = 0$  denkleminin iki eşit kökü olduğu tüm  $k$  gerçel sayılarını bulunuz.
- $\mathbb{Z}$  tam sayılar kümesi olsun  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ve
  - $f(f(n)) = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $f(f(n+2)+2) = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$
  - $f(0) = 1$
 özelliklerini sağlayan tek fonksiyonun  $f(n) = 1 - n$  olduğunu gösteriniz.
- 210 sayısından küçük ve 210 ile aralarında asal olan kaç tane doğal sayı vardır?
- $m^2 - 7n^2 = 1$  eşitliği sağlayan  $(m, n)$  çiftleri nelerdir?
- Dar açısı  $30^\circ$  olan bir paralel kenarda, köşegenlerin oranı  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}/\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  ise, kenarların oranını bulunuz.
- $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots + \frac{1}{255.257} = ?$
- $(x+y)^2 = 2$  ve  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2 = 8$  ise,  $xy = ?$

- $a, b, c, d$ ,  $x^4 - bx + 3 = 0$  denkleminin kökleri iseler, kökleri  $\frac{a+b+c}{d^2}$ ,  $\frac{a+b+d}{c^2}$ ,  $\frac{a+c+d}{b^2}$  olan denklemin bulunuz.
- Her  $n$  doğal sayısı için  $\frac{21n+4}{14n+3}$  kesrinin indirgenemez olduğunu gösteriniz. (Bu 1959 yılında yapılan ilk matematik olimpiyatlarından bir sorudur.)
- $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + \dots + 49.50 = ?$  Aşağıdaki çift yönlü önermeleri kanıtlayınız.
- Bir sayının 3 ile bölünebilmesi için gerekli ve yeterli koşulun ( $g.$  ve  $y.$  koşul) basamaklar toplamının 3 ile bölünebilmesidir.
- Bir sayının 9 ile bölünebilmesi için  $g.$  ve  $y.$  koşul basamaklar toplamının 9 ile bölünebilmesidir.
- Bir sayının  $2^k$  ile bölünebilmesi için  $g.$  ve  $y.$  koşul son  $k$  basamağın  $2^k$  ile bölünebilmesidir. Örneğin  $19392$ ,  $8 = 2^3$  ile bölünebilir çünkü  $392$ ,  $8$  ile bölünebilir.
- Bir sayının  $5^k$  ile bölünebilmesi için  $g.$  ve  $y.$  koşul son  $k$  basamağının  $5^k$  ile bölünebilmesidir.
- Bir sayının 11 ile bölünebilmesi için  $g.$  ve  $y.$  koşul basamakları bir toplayıp, bir çıkartarak elde ettiğimiz sayının 11 ile bölünebilmesidir. Örneğin  $5 - 1 + 6 - 2 + 9 - 4 + 9 = 22$  olduğundan  $11|5162949$ .

\*ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi