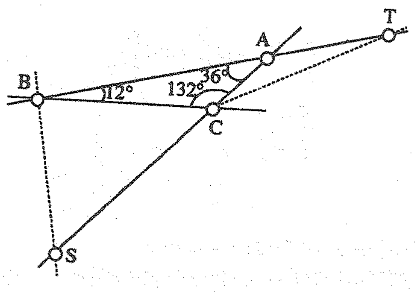
$\beta = \gamma$ dir.



Yazımızı şu uyarı ile kapatıyoruz: Steiner-Lehmus teoremi üçgenin dış açıortayları için muteber değildir; yani ikizkenar olmayan bir üçgende iki dış açıortay uzunlukça eşit olabilir. Şekil 4 de bunun güzel bir örneğini teşkil eden ve 'Bottema üçgeni' olarak anılan üçgeni veriyoruz. [3, s.66]. B ve C köşelerine ait dış açıortayların bu üçgende uzunlukça eşit olduklarının ispatını okuyucularımıza bırakıyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Coxeter, H. M. S., Greitzer, S.L., *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, Vol. 19, 1967, New York and the L.W. Singer Co., Syracuse.

[2] Coxeter, H.M.S., *Introduction to Geometry*, John Wiley, New York, 1961.

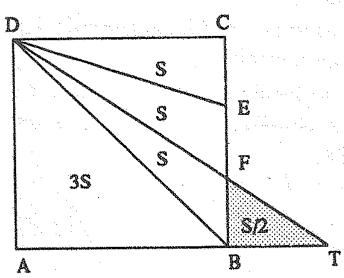
[3] Court, N.A., *College Geometry*, Barnes and Noble, 1952, New York.

[4] J. V. Malesevic: "A direct proof of the Steiner-Lehmus teorem" *Mathematics Magazine*, 43(**1970**)101-107.

1994 ÖĞRENCİ YERLEŞTİRME SINAVI (II)

Ülkü Öztaş - Onur Sağsen *

27.

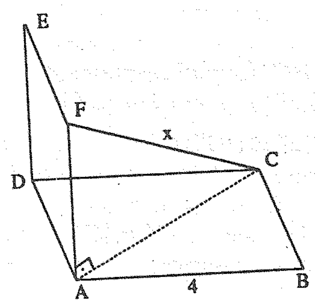


27

ABCD **bir kare,** $F \in [DT]$ **ve** $|CE| = |EF| = |FB|$ **olduğuna göre** $A(\triangle FBT)/A(\triangle DBF)$ **oranı nedir?**

Çözüm: $\triangle FBT$ ve $\triangle FCD$ üçgenleri benzer üçgenlerdir ve benzerlik oranları $\frac{|FB|}{|FC|} = \frac{1}{2}$ dir. Böylece $\frac{|FT|}{|FD|} = \frac{1}{2}$ olur. Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olacağından, sorulan oran $\frac{1}{2}$ dir.

28.

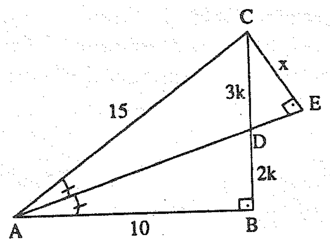


$|AB| = 4$ **cm şekildeki** *ABCD* **ve** *AFED* **küreleri birbirlerine dik ve eşit iseler** $|FC| = x$ **nedir?**

* Üçler Dershanesi Öğretmeni, Ankara

Çözüm: FA, DA ve AB doğrularına dik olduğundan, üç dikme teoremine göre, $ABCD$ kare düzlemine dik, dolayısı ile $FA \perp AC$ dir. $|FA| = 4$, $|AC| = 4\sqrt{2}$ bulunur. FAC dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $x = 4\sqrt{3}$ elde ederiz.

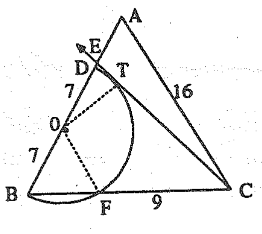
29.



ABC ve AEC üçgenleri dik, AE açıortay, $|AB| = 10$, $AC = 15$, ise $|CE| = x$ nedir?

Çözüm: ABC üçgeninde Pisagor bağıntısından $|BC| = 5\sqrt{5}$ buluruz. Açı ortay teoremi ise $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2}{3}$ verir. ABD ve ACE üçgenleri benzer olduklarından $\frac{2\sqrt{5}}{x} = \frac{2}{3}$, bize $x = 3\sqrt{5}$ verecektir.

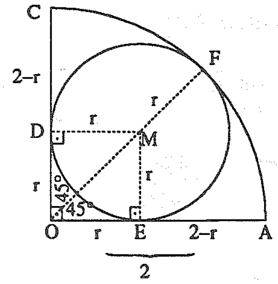
30.



ABC üçgeni eşkenar ve $|AC| = 16$, $|OB| = |OD| = 7$ cm ise $|CT| = x$ nedir?

Çözüm: OBR üçgeninde $|OB| = |OE| = 7$ olduğundan OBF eşkenardır ve $|BF| = 7$ cm dir. C noktasının çembere göre kuvveti alınarak bulunan $|CT|^2 = |CF||CB|$ eşitliğinden $|CT| = 12$ cm buluruz.

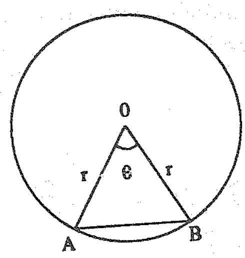
31.



$|OA| = 2$ olduğuna göre, r nedir?

Çözüm: $|OA| = |OF|$ olduğundan, $2 = \sqrt{2}r + r$ denklemi çözülerek $r = 2(\sqrt{2} - 1)$ bulunur. Veya; Çemberler F noktasında içten teğet olduklarından O, M, F noktaları doğrudaştır. Bu $OM = 2 - r$ verir. Teğet, değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan $MD \perp OC$ ve $ME \perp OA$ olur. $|ME| = |MD| = r$ olduğundan, $|OE| = r$ ve OEM ikizkenar dik üçgeninde $2 - r = \sqrt{2}r$ buluruz.

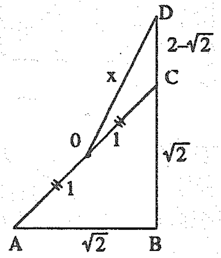
32.



$r = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $|AB| = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ise çember içine çizilecek düzgün çokgen kaç kenarlıdır?

Çözüm: OAB üçgeninde kosinüs teoremini uyguluyarak $r^2(2 - \sqrt{3}) = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos\theta$ buluruz ki bu da $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ veya $\theta = 30°$ verir. $\frac{360}{30} = 12$ olduğundan çokgen 12 kenarlıdır.

33.



ABC üçgeni ikizkenar ve dik, $|OA| = |OC|$, $|BD| = |AC| = 2$ cm olduğuna göre,

$|OD| = x$ **nedir?**

Çözüm: $|AC| = 2$, ve ABC üçgeninin ikizkenar dik üçgen olduğundan $|BC| = \sqrt{2}$ buradan da $|CD| = 2 - \sqrt{2}$ bulunur. OCD üçgeninde uygulanan kosinüs teoremi $x^2 = 1 + (2-\sqrt{2})^2 + 2(2-\sqrt{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ veya $x = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ verir.

34. $A = \{a, c, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ **olduğuna göre** B**'nin alt kümelerinden kaç tanesi** A **kümesini kapsar?**

Çözüm: $B - A = \{b, e, f, g\}$ kümesinin $2^4 = 16$ alt kümesi vardır. Bunlardan herhangi bir C kümesi için $A \subset A \cup C$ olacağından, aranılan küme sayısı 16 tanedir.

35. $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ **ise,** $\cos 2x$ **nedir?**

Çözüm: Her iki tarafın karesini alıp, $2\sin x \cos x = \sin 2x$ eşitliği kullanılırsa $1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$ bulunur. $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ eşitliğinden $\cos 2x = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ elde edilir.

36. $\sum_{n=1}^{10} \Pi_{m=2}^{\infty}(mn - 3n) = ?$

Çözüm: $m = 3$ için çarpımı oluşturan çarpanlardan biri sıfır oluyor, dolayısı ile toplam sıfırdır.

37. En küçükleri 3 yaşında ve yaş farkları aynı olan 6 kardeşin yaşları toplamı 48 ise en büyükleri kaç yaşındadır?

Çözüm: Çocukların yaşları küçükten büyüğe doğru $a_1, a_2, \cdots, a_6$ olsun. Bu aritmetik bir dizidir. Yaş farkına d dersek $a_6 = a_1 + (6-1)d$ olduğundan; yaşlar toplamı $48 = \frac{6}{2}(a_1 + a_6)$ olur. Buradan $a_6 = 13$ bulunur.

38. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **ise** $A^2 - 4A + 4I$ **nedir?**

Çözüm: $A^2 - 4A + 4I = (A - 2I)^2$ olduğundan, $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $(A - 2I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ bulunur.

39. $i^2 = -1$ **olduğuna göre** $\begin{vmatrix} 1 & i & i+1 \\ 0 & 1 & i-1 \\ 0 & i & i \end{vmatrix}$ **determinantı nedir?**

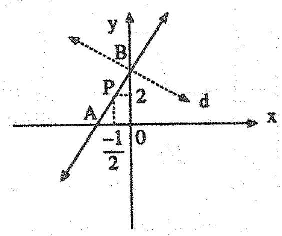
Çözüm: Birinci sütunu kullanıp, determinantı alırsak,

$1. \begin{vmatrix} 1 & i-1 \\ i & i \end{vmatrix} = i - (i^2 - i) = 2i - i^2 =$ $2i + 1$ buluruz.

40. $z = x + iy$ **ve** $|z + 2 - i| = 10$ **ise** $(x+2)^2 + (y-1)^2 = ?$

Çözüm: Karmaşık sayıların toplamı tanımı ve mutlak değer tanımından $|x + iy + 2 - i| = 10$ veya $|(x+2) + i(y-1)| = 10$ veya $\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = 10$ veya $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 100$ bulunur.

41.



$|OB| = 4|OA|$ **ve** $d \perp AB$ **olduğuna göre** d **doğrusunun denklemi nedir?**

Çözüm: AB doğrusunun eğimi 4, $d \perp AB$ olduğundan d'nin eğimi $-\frac{1}{4}$ dir. AB doğrusunun denklemi $y - 2 = 4(x + \frac{1}{2})$ olup, $x = 0$ için bulunan B noktasının koordinatı 4 dür. d'nin denklemi $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 0)$ veya $4y - x - 16 = 0$ dır.

42.

$d_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-1}$

$d_2 : \frac{x}{a} = \frac{y}{2} = \frac{2}{-4}$

$d_1 \perp d_2$ ise a nedir?

Çözüm: d_1 doğrusunun yön vektörü $(-2, 3, -1) = \vec{N_1}$, d_2 doğrusunun yön vektörü ise $\vec{N_2} = (a, 2, -4)$ dür. $d_1 \perp d_2$ için gerek ve yeter koşul $\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = 0$ olduğundan

$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = -2a + 6 + 4 = 0$ veya $a = 5$ olmalıdır.

43. $A = (1, 0, -1)$ **noktasından geçen ve normal vektörü** $\vec{N} = (-1, -2, 1)$ **olan düzlem denklemi nedir?**

Çözüm: (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve normal vektörü $\vec{N} = (A, B, C)$ olan düzlem $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ olarak betimlendiğinden, aranılan düzlem $x + 2y - z - 2 = 0$ olmalıdır.

44. $\mathbb{R}^3$ de aşağıdaki önermelerin hangisi yanlıştır?

a) Paralel iki doğrudan birine paralel olan bir doğru diğerine de paraleldir.

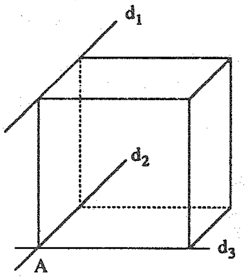
b) Birbirlerine paralel üç doğru aynı düzlemde olmayabilir.

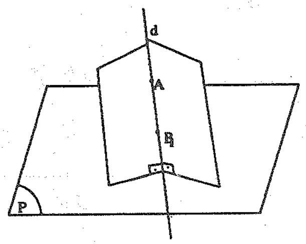
c) Paralel iki doğrudan birini kesen bir doğru diğerini de keser.

d) Bir noktadan geçen ve bir düzleme paralel olan bir düzlem vardır.

e) İki noktadan geçen ve bir düzleme dik olan bir düzlem vardır.

Çözüm:





Bu soruda a, b, d önermelerinin doğruluğu açıktır. Yalnız sadece bir değil, iki yanıt var. Çünkü c ve e önermeleri yanlış! c önermesinin yanlışlığı görmek için ilk şekile bakalım. d_1 ve d_2 doğruları paralel, $d_1 \cap d_3 = \{A\}$ fakat $d_1 \cap d_3 = \phi$. e önermesinin yanlışlığını görmek için yukarıdaki ikinci şekile bakalım. A ve B noktaları P düzlemine dik olan d doğrusu üzerindeler. Ancak A ve B den geçen ve P düzlemine dik olan **sonsuz** düzlem vardır.

45. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{2}}{\sin 4x}$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin^2 x - \dfrac{1}{2} = 0$ ve $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 4x = 0$

$\sin^2 x - \frac{1}{2}$ ve $\sin 4x$ türevlenebilir olduğundan; L'Hopital kuralı gereğince istenilen limit $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2 \sin x \cos x}{4 \cos 4x}$ ile aynıdır ve $-\frac{1}{4}$ dür.

46. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 3}$

Çözüm: $x^3 - 3x^2$ ve $x^2 - 3$ heryerde sürekli fonksiyonlardır. $x = 3$, $x^2 - 3$'in kökü olmadığından, verilen fonksiyon bu noktada da süreklidir. Dolayısı ile istenen limit, fonksiyonun 3 noktasında aldığı sıfır değeridir.

47. $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{2x+5}{2x+3})^{4x-1}$

Çözüm: İstenen limit 1^∞ şeklinde bir belirsizliktir. Ancak verilen koşullar L'Hopital kuralını uygulamamıza olanak veriyor. $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{2x+5}{2x+3})^{4x-1} = L$ olsun. ln fonksiyonu sürekli olduğundan $L = \lim\limits_{x \to \infty} (4x-1) \ln \dfrac{2x+5}{2x+3}$ ki buda $0.\infty$ şeklinde bir belirsizlik. Ancak bunu $\ln L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln \frac{2x+5}{2x+3}}{\frac{1}{4x-1}}$ yazarak $\frac{0}{0}$ şeklinde bir belirsizliğe dönüştürebiliyoruz. L'Hopital kuralını uygulayarak $\ln L = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{-4}{(2x+5)(2x+3)}}{-\frac{4}{(4x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{16x^2 - 16x + 1}{4x^2 + 16x + 15} = 4$ buluyoruz ki, bu $L = e^4$ verir.

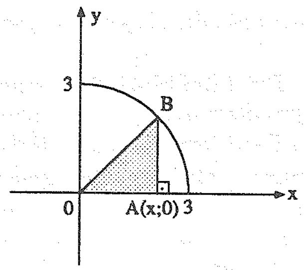
48. $f(x) = \dfrac{x^2 + m}{x - 1}$ **fonksiyonunu** $x = 3$ **de extremumu olması için** m **ne olmalıdır?**

Çözüm: Extremum tanımından $\frac{df}{dx}|_{x=3} = 0$ olmalıdır. Türevin $x = 3$ noktasındaki değeri $m = 3$ olmasını gerektirir.

49. $f(x) = \ln(3x - 1)$ **ise** $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0) = ?$

Çözüm: Verilen fonksiyonun tersi, $f^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{3}$ fonksiyonu olduğundan $f^{-1}(0) = \frac{2}{3}$ dür. $(f^{-1})'(x) = \frac{e^x}{3}$ olup, $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{3}$ dür. Dolayısı ile $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0) = 1$ bulunur.

50.



OAB **üçgenin alanı** x**'in hangi değeri için maksimumdur?**

Çözüm: B noktasının kordinatları (x, y) olsun. B, $(0, 6)$ merkezli, 3 yarıçaplı çember üzerinde olduğundan $y = \sqrt{9 - x^2}$ olacaktır. $A(x) = \text{Alan} = \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}$ olduğundan, x'in aranılan değeri $A'(x) = \frac{18x - 4x^3}{2\sqrt{ax^2 - x^4}}$ değerini sıfır yapan 0, $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ den biri olmalıdır. Gerekli inceleme aranılan değerin $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ olduğunu gösterir.

51. $\displaystyle\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx = ?$

Çözüm: $u - \sqrt{x}$ denirse $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ veya $du = \frac{dx}{2u}$ olacaktır.

$\displaystyle\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx = \int \frac{1 + u}{1 - u} 2u du = 2 \int \frac{u(1+u)}{1-u} du$ bulunur.