STEINER-LEHMUS TEOREMİ

Hüseyin Demir *

1840 yılında C.L. Lehmus adında bir matematikçi büyük geometrici Jakob Steiner'e ilk bakışta basit görünen bir geometri problemi gönderir. Steiner, bu masum görünüşlü fakat zor problemi ileri geometri yöntemleri kullanarak çözer. O günden sonra bir çok matematik meraklısı bu probleme basit bir çözüm bulmaya uğraşmış ve söz konusu netice, biri matematiğe yaptığı büyük katkılarıyla herkesçe maruf, diğeri ise hiç tanınmamış iki matematikçinin adları ile yani "Steiner-Lehmus Teoremi" olarak şöhret kazanmıştır. [1, s.14]

Teoremin ifadesi şudur: *İki iç açıortayı uzunlukça eşit olan bir üçgen ikizkenardır.* Bu, ispatı çok kolay olan bir teoremin karşıtıdır. İspatı yönünde bir çok teşebbüs başarısız kalmışsa da, 1840 yılından bu yana teoremin 60 kadar başarılı ispatı verilmiştir. Lise kitaplarımızda yer almayan bu önemli teoremin eldeki bazı dergi ve kitaplardan derlenen dört ispatını burada okuyucularımıza sunmak istiyoruz. Bunlardan ilk ikisi doğrudan, öteki ikisi dolaylı olup "olmayana eğri" yöntemine dayalı bulunmaktadır.

Bir ABC üçgeninde A, B, C köşelerinin karşısında kalan kenarların uzunluklarını sırasıyla a, b, c ile, çevre uzunluğunu $2s$ ile, A, B ve C köşelerinden geçen iç açıortaylarının uzunlukları n_a, n_b ve n_c ile ve $< BAC$, $< CBA$, $< ACB$ açılarının ölçülerini de 2α, 2β, 2γ ile gösterelim.

İspat 1 (Doğrudan). Bilinen

$$n_a = \frac{2}{a+b}\sqrt{bcs(s-a)}$$

$$n_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)}$$

$$n_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

formülleri kullanıldığında, $n_b = n_c$ varsayımından kolaylıkla $n_b^2 = n_c^2$ ve $n_b^2 - n_c^2 = 0$ yani

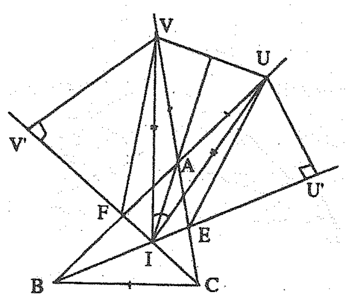
$$(a+c)^2 b(s-c) - (a+b)^2 c(s-b) = 0$$

elde edilebilir. $2s = a+b+c$ kullanılmak üzere bu denklemin her terimi 2 ile çarpılıp ifade a nın kuvvetlerine göre düzenlendiğinde

$$(b-c)[a^3 + (b+c)a^2 + 3bca + bc(b+c)] = 0$$

bulunur ki köşeli parantez içindeki ifade, bütün terimleri artı olduğundan, sıfırdan farklıdır. O halde, $b - c = 0$ olup üçgen ikizkenardır.

Not. Liselerde açıortay uzunlukları için yukarda verilen formüller elde edildiğinde, bir uygulama olarak bu teoremden söz etmeli ve öğrencilerden teoremin ispatı istenmelidir.



İspat 2 (Doğrudan, [4].) AB ve AC kenarları üzerinde BE, CF sırasıyla B ve C den geçen içaçıortaylar olacak şekilde E ve F noktaları alalım. B ve C den geçen içaçıortayların uzunlukça eşit olduğunu yani $|BE| = |CF|$ olduğunu farz edelim. BE ve CF bir I noktasında kesişsin (Şekil 1). A köşesi U ve B, C ve V arasında kalacak ve $|AU| = |AV| = |BC|$ olacak şekilde U ve V noktalarını alıp ikizkenar AUV üçgenini çizelim. $[UV]$'nin

*ODTÜ Emekli Öğretim Üyesi

orta dikmesi I noktasından geçeceğinden (neden?) $|IU| = |IV|$ ve $| < AIU| = | < AIV|$ olacaktır. Sırasıyla U ve V nin BE ve CF üzerindeki dikme ayaklarını U' ve V' ile gösterelim. EBC ile EUA üçgenlerinin alanları, bu üçgenlere ait $[BC], [AU]$ kenarları ile bunlara karşılık gelen yükseklikler uzunlukça eşit olduğundan, (açıortay üzerindeki E noktası BC ve AB doğrularından aynı uzaklıktadır !) eşittir. Bu alanlara ABE üçgeninin de alanının eklenmesiyle ABC ve EUB üçgenlerinin, benzer olarak da ABC ve FVC üçgenlerinin, bu suretle de EBU ve FCV üçgenlerinin alanca eşit oldukları görülür. Bu üçgenlerde $[BE]$ ve $[CF]$ kenarları eşit olduğundan ilgili yüksekliklerin yani $[UU']$ ve $[VV']$ nin uzunlukça eşit olduğu görülür. Demek ki UIU' ve VIV' dik üçgenleri eşit olup

$$| < UIU'| = | < VIV'|$$

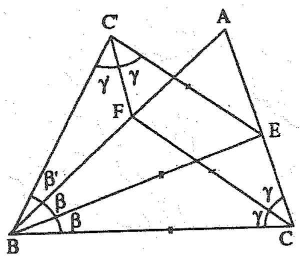
ve

$$| < AIU'| = | < AIV'|$$

ve en nihayet bir kaç basit işlemle

$$< CBA = < ACB$$

olduğu görülür.

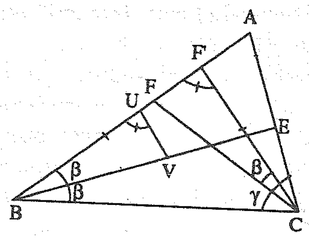


İspat 3 (Dolaylı , [3, s. 65-66].) AB ve AC kenarları üzerinde BE, CF sırasıyla B ve C den geçen açıortaylar olacak şekilde E ve F noktaları alalım. (Şekil 2). $|BE| = |CF|$ ve $\beta < \gamma$ olduğunu kabul ederek bir çelişkiye varacağız. EBC ve FBC üçgenlerinde $|BE| = |CF|$ eşliğinden, ve $\beta < \gamma$ eşsizliğinden $|CE| < |BF|$ elde edilir.

$CEC'F$ paralelkenar olacak şekilde bir C' noktası ithal edildiğinde, $|BE| = |CF| = |EC'|$ olup $EC'B$ üçgeni ikizkenardır. O halde, $\beta' = | < FBC'|$ ve $\gamma' = | < BC'F|$ yazarak, $\beta + \beta' = \gamma + \gamma'$ bulunur ki $\beta < \gamma$ dan $\beta' > \gamma'$ eşitsizliğini ve bundan da $FC'B$ üçgeninde $|FC'| > |FB|$ ve $|FC'| = |CE|$ nedeniyle $|CE| > |FB|$ bulunur ki bu imkansızdır. Öyle ise, $\beta <$ ugamma olamaz. Benzer olarak $\gamma < \beta$ da olamaz. O halde, $\beta = \gamma$ olup üçgen ikizkenardır.

İspat 4 (Dolaylı). Bu ispat aşağıdaki yardımcı teoreme dayanmaktadır:

Yardımcı Teorem : *Bir üçgende iki açıdan, ölçüsü daha küçük olana ait iç açıortayın uzunluğu, ölçüsü daha büyük olana ait iç açıortayın uzunluğundan daha büyüktür.*



İspat ([2, s. 470]) $\beta < \gamma$ olduğunu varsayalım. A ve F arasında kalacak ve $|F'CF| = \beta$ olacak şekilde bir F' noktası alalım (Şekil 3).

$F'BC$ üçgeninde $\beta + \beta < \gamma + \beta$ olduğu için $|CF'| < |BF'|$ olup B ve F' arasında kalacak ve $|BU| = |CF'|$ olacak şekilde bir U noktası alınabilir. BE doğrusu üzerinde, $UV \parallel F'C >$ olmak üzere V noktası alınacak olursa $< BUV = < BF'C >$ olup UBV ve $F'CF$ üçgenleri eşit olup, $|BV| = |CF|$ olmalıdır. $UV \parallel F'C$ olduğundan, V noktası B ve E arasında kalır ve $|CF| = |BV| < |BE|$ elde edilir.

Bu yardımcı teoremi kullanarak, Steiner-Lehmus teoremini dolaylı olarak şu şekilde ('olmayana ergi' ile) ispatlayabiliriz. Eğner $\beta < \gamma$ olsaydı, yardımcı teorem gereğince $n_b > n_c$ olurdu ki bu, $n_b = n_c$ varsayımıyla çelişme yaratır. O halde $\beta < \gamma$ ve benzer olarak $\gamma < \beta$ olamaz, yani