GAUSS FORMÜLÜNÜN GENELLEŞTİRİLMESİ (II)

Nurettin ÇALIŞKAN *

Birincisi bir birim, ikincisi iki birim. Üçüncüsü üç birim, $\cdots n$'incisi n birim uzunluğunda olan n tane çubuk alalım. Bu çubukları ucuca birleştirdiğimizde, uzunluğu

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$ kadar olan bir çubuk elde ederiz.

Aynı çubukları, üstüste getirelim. Çubukların uzunlukları toplamına bakıldığında, elimizde n tane 1 birim $(n-1)$ tane $(2-1)$ birim $\cdots$ bir tane $(n-(n+1))$ birimlik çubuklar olduğu görülecektir. Bu uzunlukların toplamı, bize toplam uzunluğu verir, yani

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= n(1-0)+(n-1)(2-1)+\cdots \\ &\quad (n(k-1))(k-(k-1))+ \\ &+ \cdots 1(n-(n-1)) \\ &= \sum_{k=1}^{n}[n-(k-1)][k-(k-1)] \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} n-\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1\end{aligned}$$

yada, $\sum_{k=1}^{n} 1=1+1+\cdots+1=n$ eşitliği ile

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n} k &= n\sum_{k=1}^{n} 1+\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= n^2+n\end{aligned}$$

veya $\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ sonucunu buluruz.

Şimdi de kenar uzunlukları $1,2,\cdots,n$ olan n tane kare şeklinde kağıtlar alalım. Kağıtların alanları toplamı

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2 \text{ dir.}$$

Kağıtları üstüste koyduğumuzda, toplam alanın, n tane 1^2 birim kare, $(n-1)$ tane (2^2-1^2) birim kare , $\cdots$, 2 tane $[(n-1)^2-(n-2)^2]$ birim kare ve bir tane $[n^2-(n-1)^2]$ birim karelik alanların toplamına eşit olduğu görülür.

O halde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= n1^2+(n-1)(2^2-1^2)+\cdots+ \\ &\quad 2[(n-1)^2-(n-2)^2]+ \\ &+ 1(n^2-(n-1)^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n}[n-(k-1)][n^2-(n-1)^2] \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(2k-1)\end{aligned}$$

buradan da, sağ tarafı düzenleyip $\sum_{k=1}^{n} 1=n$,

$\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ bilgisi kullanılarak

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ elde edilir.

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3$ toplamını bulmak içinde, hacimleri $1^3,2^3,\cdots,n^3$ birim küpler olan n tane küp alalım. Yukarıda ki örneklerdeki gibi, küpleri üst üste koyduğumuzda, küplerin toplam hacmi

$n1^3+(n-1)[2^3-1^3]+\cdots+(n-(k-1))[k^3-(k-1)^3]+\cdots+1[n^3-(n-1)^3]$ sayısına eşit olacaktır.

Ya da

* ODTÜ Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n}(n-(k-1))(k^3-(k-1)^3) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(3k^2-3k+1)\end{aligned}$$

buradan da

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ elde edilir.

Bu üç örneğe baktığımızda, p nin 1,2 ve 3 değerleri için

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(k^p-(k-1)^p)$$

olduğunu görmekteyiz. $p \geq 4$ değerleri için bu ifadenin doğruluğunu araştırmaksızın $\sum_{k=1}^{n} k^p$ toplamının eşitliğini başka yöntemlerle bulmaya çalışacağız.

f reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ varsa, f fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyondur ve bu limit değeri de $Df(x)$'e eşittir. Burada, D türev operatörü olmak üzere, $Df(x)$, f fonksiyonunun x noktasındaki türevini tanımlar.

f fonksiyonu tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise, yukarıdaki limit tanımıyla verilen türev operatörü bu fonksiyon için geçerli değildir.

h'in sıfır komşuluğundaki değerleri yerine, $h = 1$ alındığında, verilen türev tanımı

$f(x+1) - f(x)$ şekline dönüşür.

Böylece tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonları için D türev operatörü yerine

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

şeklinde bir, Δ, fark operatörü tanımlanır.

f fonksiyonu reel sayılardan reel sayılara yeterince "düzgün" bir fonksiyon ise, Df ve Δf de reel sayılardan kendisine fonksiyonlardır.

Türev operatörünün özellikleri, fark operatörü içinde geçerlidir.

$c \in \mathbb{R}$ f ve h reel değerli fonksiyonlar ise,

(1) $\Delta(cf)(x) = c\Delta f(x)$

(2) $\Delta(f+h)(x) = \Delta f(x) + \Delta h(x)$

(3) $\Delta(f.h)(x) = h(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta h(x)$

(4) $\Delta f(x) = 0$ ise $f(x) \equiv$ sabit olur.

$\sum_{k=0}^{n} f(k)$ toplamının değerini bulmak için, fark operatörünün özelliklerinden yararlanacağız.

$f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon olsun, $x \in \mathbb{Z}^+$ için $\Delta F(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonlarına bakalım.

$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = f(0)$

$\Delta F(1) = F(2) - F(1) = f(1)$

$\Delta F(n-1) = F(n) - F(n-1) = f(n-1)$

$\Delta F(n) = F(n+1) - F(n) = f(n)$

eşitliğin her iki tarafını topladığımızda

$F(n+1) - F(0) = f(0) + f(1) + \cdots + f(n)$

yada

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = F(n+1) - F(0) = F(k)|_{k=0}^{k=n+1}$$

elde ederiz.

Böylece, verilen bir f fonksiyonu için $\sum_{k=0}^{n} f(k)$ toplamını bulma sorusunu, $\Delta F = f$ olacak şekilde bir F fonksiyonu bulmaya dönüştürdük.

Örnek olarak, k bir tam sayı a birden farklı reel sayı olmak üzere, $\sum_{k=0}^{n} a^k$ toplamını bulmaya çalışalım.

İlk olarak $f(k) = a^k$ fonksiyonu için $\Delta F(k) = f(k)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonunu bulmalıyız. Bu fonksiyon $F(k) = \frac{1}{a-1}a^k$ dır.

O halde

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a^k &= \frac{1}{a-1}a^k|_{k=0}^{k=n+1} \\ &= \frac{1}{a-1}(a^{n+1}-1)\end{aligned}$$

olmalıdır.

Şimdi de p pozitif bir tam sayı olmak üzere $\Delta F(k) = k^p$ özdeşliğini veren F fonksiyonunu bulmaya çalışacağız.

$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $D(x^m) = mx^{m-1}$ olduğunu biliyoruz. Δ fark operatörü için, benzer özelliği taşıyan bir fonksiyon bulabilirmiyiz?

$p \in \mathbb{Z}^+$ alalım. $x^{(p)}$ formunda bir "üstlü terim" tanımlıyalım, öyleki $x^{(p)}$

$x^{(0)} = 1$

$x^{(1)} = x$

$x^{(2)} = x(x-1)$

$\vdots$

$x^{(p)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-p+1)$
özelliğine sahip olsun.

Oluşturduğumuz bu üstlü terimi kısaca

$$\begin{cases} x^{(0)} = 1 \\ x^{(p+1)} = x^{(p)}(x-p) \quad ; p = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

olarak tanımlıyabiliriz.

$F(x) = x^{(p)}$ olsun. Bu fonksiyona fark operatörünü uyguladığımızda

$\Delta F(x) = px^{(p-1)}$ olacaktır. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= F(x+1) - F(x) \\ &= (x+1)^p - x^{(p)} \\ &= (x+1)(x)(x-1)\cdots(x-p+2) - \\ & \quad x(x-1)\cdots(x-p+2)(x-p+1) \\ &= x(x-1)\cdots(x-p+2) \\ & \quad [x+1-(x-p+1)] \\ &= px(x-1)\cdots(x-p+2) \\ &= px^{(p-1)} \end{aligned}$$

Bu sonuçla, $p \in \mathbf{Z}^+$ için, $\Delta F(x) = x^{(p)}$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun $F(x) = \frac{x^{(p+1)}}{p+1}$ olduğunu göstermiş olduk.

O halde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^{(p)} &= \frac{k^{(p+1)}}{p+1}\Big|_{k=0}^{k=n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(p+1)}}{p+1} \end{aligned}$$

olmalıdır.

Bizim bulmaya çalıştığımız toplam $\sum_{k=1}^{n} k^p$ şeklindeydi. k^p ifadesini üstlü terimler cinsinden yazdığımızda, yukarıda elde ettiğimiz sonucu kullanarak, bu toplamın değerini bulabileceğiz.

$p = 1$ olduğunda $k^{(1)} = k$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k^{(1)} &= \frac{k^{(2)}}{2}\Big|_{k=0}^{k=n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n)}{2} \\ p = 2 \text{ için } k^{(2)} &= k(k-1), \text{ yada} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^{(2)} &= k^2 - k \text{ veya} \\ k^2 &= k^{(2)} + k \\ &= k^{(2)} + k^{(1)} \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (k^{(2)} + k^{(1)}) = (\frac{k^{(3)}}{3} + \frac{k^{(2)}}{2}|_0^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \frac{(n+1)^{(2)}}{2} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$p = 3$ için bakalım

$$\begin{aligned} k^{(3)} &= k(k-1)(k-2) \\ &= k^3 - 3k^2 + 2k \end{aligned}$$

buradan da

$$\begin{aligned} k^3 &= k^{(3)} + 3k^2 - 2k \\ &= k^{(3)} + 3(k^{(2)} + k^{(1)}) - 2k^{(1)} \\ &= k^{(3)} + 3k^{(2)} + k^{(1)} \\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} (k^{(3)} + 3k^{(2)} + k^{(1)}) \\ &= (\frac{k^{(4)}}{4} + 3\frac{k^{(3)}}{3} + \frac{k^{(2)}}{2}|_0^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{(4)}}{4} + (n+1)^{(3)} + \frac{(n+1)^{(2)}}{2} \\ &= (\frac{n(n+1)}{2})^2 \end{aligned}$$

$p = 4$ için, $k^4 = k^{(4)} + 6k^{(3)} + 7k^{(2)} + k^{(1)}$ ve $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$, $p = 5$ için, $k^5 = k^{(5)} + 10k^{(4)} + 25k^{(3)} + 15k^{(2)} + k^{(1)}$ ve $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)}{12}[2n^3 + 4n^2 + n - 1]$

Bu yöntemle bütün $p \in \mathbf{Z}^+$ için $T_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$ toplamının değeri bulunabilir.

Şimdide, bütün p tamsayıları için $T_p(n)$ toplamının genelleştirilmesini yapmaya çalışacağız.

$$T_p(n) = 0^p + 1^p + \cdots + (n-1)^p = \sum_{k=1}^{n-1} k^p$$

olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
T_0(n) &= n \\
T_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
T_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
T_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
T_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
T_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
T_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
T_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 - \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{24}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
T_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 - \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \\
&\quad \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
T_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10} - \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \\
&\quad \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
T_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11} - \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + \\
&\quad n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
\end{aligned}$$

Bu toplamlara bakıldığında, bütün p'ler için $T_p(n)$ toplamının bir genelleştirilmesinin olası olduğu görülecektir.

Bütün $T_p(n)$ toplamlarında n^{p+1} ifadesinin katsayısı $\frac{1}{p+1}$, n^p nin katsayısı $-\frac{1}{2}$, n^{p-1} in katsayı $\frac{p}{12}$, n^{p-2} nin katsayısı herzaman sıfır. n^{p-3} ün katsayısı $-\frac{p(p-1)(p-2)}{720}$, n^{p-4} ün katsayısı yine sıfır. Bu şekilde devam edildiğinde n^{p-k} nın, katsayısının bir sabit sayı ile $p^{(k)}$'nin çarpımından oluştuğu görülecektir.

O halde, genelleştirerek

$$\begin{aligned}
T_p(n) &= \frac{1}{p+1}(b_0 n^{p+1} + \\
&\quad \binom{p+1}{1} b_1 n^p + \cdots + \binom{p+1}{p} b_p n) \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{m+1}{k} b_k n^{p+1-k}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ şeklinde ifade edilen m'in k'li kombinasyonudur.

Toplam içinde verilen b_k sayıları Bernoulli sayıları olarak bilinir. Bernoulli sayıları aşağıda verdiğimiz ilişki ile tanımlanır.

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} b_k = 0 \quad p = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Bernoulli sayıları için ilk 12 terim

$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ 0,\ -\frac{1}{30},\ 0,\ \frac{1}{42},\ 0,\ -\frac{1}{30},\ 0,\ \frac{5}{66},\ 0,\ \frac{-691}{2730}$ şeklinde sıralanmıştır.

Dikkat ederseniz, k ikiden büyük tek sayılar olmak üzere $b_k = 0$ yani $b_{2n+1} = 0, \forall n \geq 1$, dir.