PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A96. Eğer $Z = \frac{(1+i)^3+(1+i)^6+\cdots+(1+i)^{12n}}{(1-i)^3+(1-i)^6+\cdots+(1-i)^{12n}}$ ise (n bir doğal sayı), $|Z|$'yi hesaplayınız. (*Hasan Kullap*)

A97. Bir ABC üçgeninde $\widehat{ABC} = 18°$ ve $\widehat{ACB} = 54°$ ise, $\frac{|AB|}{|AC|}$ oranını hesaplayınız. (*Ali Akın*)

A98. Bir ABC üçgeninin içmerkezi O, A açısı karşısında oluştan teğet çemberin merkezi O' olsun. $|OO'| = \frac{|AB||AC|}{|AO|} - |AO|$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

A99. Bir $ABCD$ karesinin içinde $\widehat{DAK} = \widehat{DCK} = 10°$ olacak şekilde bir K noktası ve BC kenarı üzerinde $\widehat{BAL} = 35°$ olacak şekilde L noktası işaretleniyor. $\widehat{AKL}$ açısını hesaplayınız. (*Alaattin Aktaş*)

A100. i basamaklı bir sayının, birler basamağı ve i'yinci basamağındaki rakamlarının yeri değiştirilerek bulunan sayı ile ilk sayının farkının mutlak değerinin rakamları toplamını x_i ile gösterelim. $x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ toplamını hesaplayınız. (*Cem Güzel*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y96. Bir üçgenin a, b, c kenar uzunlukları ve r içteğet çember yarıçapı için

$$\frac{abc}{a+b+c} \geq 4r^2$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (*Tamer Adanır*)

Y97. Bir üçgenin S alanı ve r içteğet çember yarıçapı için $S \geq 3\sqrt{3}r^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösteriniz. Eşitliğin hangi hallerde sağlanacağını bulunuz. (*Dinçer Akay*)

Y98. x, y, a, b, c doğal sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x^2 + a^3 &= y^4 \\ x^2 + a^3 + b^3 &= y^4 \\ x^2 + a^3 + b^3 + c^3 &= y^4 \end{aligned}$$

denklemlerinin herbirinin sonsuz sayıda tamsayı çözümü olduğunu gösteriniz. (*Almas Rimov*)

Y99. İçteğet çember yarıçapı r olan bir ABC üçgeninin içmerkezinin A, B, C köşelerine uzaklıkları sırasıyla X_A, X_B, X_C olsun. ABC üçgeninin A, B, C açıları karşısındaki dıştan teğet çemberlerin merkezlerinin içmerkeze uzaklıkları sırasıyla Y_A, Y_B, Y_C olsun. $r(Y_A + Y_B + Y_C) = X_AX_B + X_AX_C + X_BX_C$ olduğunu gösteriniz. (*Ergün Yaraneri*)

Y100. Bir ABC dik üçgeninde ($\hat{A} = 90°$), hipotenüse inilen dikme AD olsun. ABD ve ACD üçgenlerinin içmerkezlerini birleştiren doğru AB ve AC kenarlarını sırasıyla K ve L noktalarında kessin. ABC ve AKL üçgenlerinin alanları sırasıyla S ve S' ise, $S \geq 2S'$ olduğunu gösteriniz. (*Turgay Uçkun*)

ÇÖZÜMLER

A86. Bir ABC üçgeni verildiğinde, $X, X' \in [BC]$, $Y, Y' \in [CA]$, $Z, Z' \in [AB]$ olacak şekilde, karşılıklı kenarları birbirine paralel dışbükey ve eşkenar bir $XX'YY'ZZ'$ altıgeninin cetvel ve pergel ile çizilebileceğini gösteriniz. (*Şahin Polat*)

Çözüm. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c; altıgenin ortak kenar uzunluğu d, $|BX| = x$ ve $|CX'| = x'$ ise

$$\frac{|XZ'|}{b} = \frac{x}{a} \implies \frac{d}{b} = \frac{x}{a} \implies x = \frac{a}{b}d \quad (1)$$

$$\frac{|CX'|}{c} = \frac{x'}{a} \implies \frac{d}{c} = \frac{x'}{a} \implies x' = \frac{a}{c}d \quad (2)$$

bulunur. Bunlardan da

$$d = a - \frac{ad}{b} - \frac{ad}{c} \implies (1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c})d = a$$

ve

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (3)$$

elde edilir. b ile c nin harmonik ortalaması k ise (3)'ten $\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{2}{k} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k/2} \Rightarrow \frac{2}{2d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k/2}$ olup, $2d$'nin a ile $k/2$'nin harmonik ortalaması olduğu sonucu çıkar. k ile d çizilebilir [1]. d çizilince (1)'den x de çizilebilir. O halde XX' ve sonuç olarak $XX'YY'ZZ'$ de çizilebilir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Atasağun Baykal.*)

A87. $64 + 9^{2n}$ ifadesinin hiç bir n doğal sayısı için asal olamayacağını gösteriniz. (*Mehmet Şahin*)

Çözüm.

$$\begin{aligned} 64 + 9^{2n} &= (8+9^n)^2 - 2\cdot 8\cdot 9^n \\ &= (8+9^n)^2 - 4^2 3^{2n} \\ &= (8+9^n - 4\cdot 3^n)(8+9^n+4\cdot 3^n). \end{aligned}$$

Her doğal sayı n için $8 + 9^n - 4\cdot 3^n > 1$ ve $8 + 9^n + 4\cdot 3^n > 1$ olduğundan, $64 + 9^{2n}$ sayısı 1'den büyük iki sayının çarpımı olur.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Ruhi Tabur, Atasağun Baykal, Çağatya Candan, Seyhun Kesim, Ergün Yaraneri, Ali Akın, Ülkü Öztaş, Emre Alkan.*)

A88. Bir ABC üçgeninde I_b ve I_c dışçemberleri BC, CA, AB doğrularına D_b, E_b, F_b ve D_c, F_c, E_c noktalarında değiyor.

$$\frac{\text{alan}(D_cD_bF_bF_c)}{\text{alan}(ABC)} > \frac{a^2}{bc}$$

olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. ABC'nin alanı S, dörtgenin alanı S', üçgenin yarı çevresi u ve çevrel çember yarıçapı R ise,

$$\begin{aligned} S' &= |BD_bF_b| + |CF_cD_c| - S + |AF_bF_c| \\ &= \frac{1}{2}u^2\sin B + \frac{1}{2}u^2\sin C - ur \\ &\quad + \frac{1}{2}(u-b)(u-c)\sin A \\ &= \frac{1}{4R}[bu^2 + cu^2 + a(a-b)(u-c)] - ur \\ &= \frac{1}{4R}[(a+b+c)u^2 - a(b+c)u + abc] - ur \\ &= \frac{u}{4R}[2u^2 - a(b+c) + 4Rr] - ur \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} &= \frac{u}{4RS}[2u^2 - a(b+c)] \\ &= \frac{u}{8RS}[(a+b+c)^2 - 2a(b+c)] \\ &= \frac{u}{8RS}[a^2 + (b+c)^2] > \frac{u}{2abc}2a^2 \\ &= \frac{(a+b+c)a^2}{2abc} > \frac{2a\cdot a^2}{2abc} = \frac{a^2}{bc} \end{aligned}$$

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Ali Akın.*)

A89. $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ ve $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ olsun. $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ ve $i = 1, 2, \ldots n$ için $P_i(x) = \frac{Q(x)}{x-a_i}$ olmak üzere, $P(x) = P_1(x) + P_2(x) + \cdots + P_n(x)$ polinomunun bütün köklerinin gerçel olduğunu gösteriniz. (*Ozan Hafızoğulları*)

Çözüm. $Q(x)$'in birbirinden farklı n tane kökü vardır. Rolle teoremi gereği, herhangi iki kök arasında $Q'(x)$'in sıfır olduğu en az bir nokta bulunacaktır. O halde $Q'(c) = 0$ olacak şekilde en az $n-1$ tane nokta vardır. Öte yandan $Q'(x)$'in derecesi $n-1$ olduğundan, köklerinin sayısı $n-1$'den fazla olamaz. O halde $Q'(x)$'in birbirinden farklı tane $n-1$ tane gerçel kökü vardır. $Q'(x) = P(x)$ olduğundan $P(x)$'in bütün kökleri gerçeldir.

(**Çözenler:** *Ruhi Tabur, Uğur Yıldıran, Atasağun Baykal, Çağatay Candan, Seyhun Kesim, Emre Alkan.*)

A90. Tepesi A olan ikizkenar ABC üçgeninin içinde, tabana, yan kenarlardan birine ve birbirine teğet eş iki çember ile bu çemberlere ve yan kenarlara teğet bir çember çiziliyor. Taban açılarının hangi değeri için bu çemberlerin kenarlara değdiği altı nokta çemberdeş olur? (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. $[BC], [CA], [AB]$ üzerindeki değme noktaları sırasıyla X, X', Y, Y', Z, Z' olsun. Y, Y', Z, Z' çemberdeş olup, X, Y', Z, Z' noktaları çemberdeş ise $\widehat{ZXY'} = \widehat{Y'ZA} = \widehat{B}$ olmalıdır. Bu bilgilerden, $\widehat{CXY'} = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) - B = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$ ve $\widehat{XY'C} = \pi - \widehat{CXY'} - c = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) - B = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$ olup, CYX üçgeni ikizkenar olur. O halde $|CX| = |CY'|$ olup, $|XX'| = |YY'|$ elde edilir. Bu da üçüncü çemberin ilk ikisine eşliğini gösterir ve $B = 60°$ bulunur.

(**Çözenler:** *Muammer Keleş, Atasağun Baykal, Uğur Yıdıran, Ergün Yaraneri, Ali Akın.*)

Y86. Dar açılı bir ABC üçgeninin A köşesinden harekete başlayan bir nokta kenarlara geldiği zaman bilinen yansıma kurallarına göre harekete devam etmektedir. Bu nokta, sırasıyla $[BC], [BA], [AC], [BC]$ kenarlarına D, E, F, G noktalarında çarpıp yansıyarak tekrar A köşesine ulaşıyor. $ADEFGA$ yolunu çiziniz ve uzunluğunu hesaplayınız. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. A'nın BC'ye göre A' simetriği alınırsa, D ve G'deki yansımalar nedeniyle

E, D, A' noktaları doğrudaş ve F, G, A' noktaları doğrudaş olur. A''nün AB ve AC'ye göre A_1 ve A_2 simetrikleri alındığında E ve F'deki yansımalar nedeniyle A_1, E, F, A_2 noktaları doğrudaş olur. Şu çizim elde edilir.

1) A', A_1, A_2 çizilip A_1A_2'nin AB ve AC ile olan E ve F arakesitleri çizilir.

2) EA' ve FA''nün BC ile olan D ve G arakesitleri çizilir.

$|AD| + |DE| = |EA'| = |EA_1|$ ve benzer olarak $|AG| + |GF| = |FA_2|$ olup, aranılan yol uzunluğu $|AA_2|$ olur. $|AA_1| = |AA'| = |AA_2|$ olduğundan AA_1A_2 ikizkenar üçgendir ve tepe açısı $2A$'dır. O halde

$$|A_1A_2| = 2|AA_1|\sin A = 2|AA'|\sin A = 4k_a \sin A$$

bulunur.

(**Çözenler:** *Tamer Adanır, Murat Aygen, Ergün Yaraneri, Atasağun Baykal.*)

Y87. Eşkenar bir ABC üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir P noktasının bu üçgene göre ayak üçgeni DEF olmak üzere, AD, BE, CF doğruları noktadaş ise P noktasının geometrik yeri nedir? (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Bir yanlışlık sonucu, Y82 numaralı yarışma problemi Y87 numarası ile tekrarlanmıştır. Özür dilerim. (A.D.)

AD, BE, CF doğruları bir Q noktasında kesişsinler. QBC, QCA, QAB üçgenlerinin alanları sırasıyla x, y, z olsun. ABC'nin kenar uzunluğu a ve alanı s ise, D'nin $[BC]$'yi bölme oranı $\lambda = \frac{|BD|}{z} = \frac{|DC|}{y} = \frac{a}{y+z} = \frac{a}{s-x}$ olup $|DB| = \frac{az}{s-x}$ ve $|DC| = \frac{ay}{s-x}$ bulunur. E ve F'nin $[CA]$ ve $[AB]$'yi bölme oranlarından

$$|EC| = \frac{ax}{s-y}, \qquad |EA| = \frac{az}{s-y}$$

$$|FA| = \frac{ay}{s-z}, \qquad |FB| = \frac{ax}{s-z}$$

elde edilir. DP, EP, FP dikmelerinin noktadaşlığı ile [2]'deki formülden

$$\sum\left[\frac{a^2y^2}{(s-x)^2} - \frac{a^2yz^2}{(s-x)^2}\right] = 0$$

olarak yazılır. Bu da $\sum \frac{y-z}{s-x} = 0$ olarak kısaltılıp $\sum(y-z)(s-y)(s-z) = 0$ eşitliğini verir. Buradan aşağıdakileri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\sum(y-z)[s^2 - (y-z)s + yz] &= 0\\
\sum(y-z)[s^2 - (s-x)s + yz] &= 0\\
\sum(y-z)(xs+yz) &= 0\\
s\sum x(y-z) + \sum yz(y-z) &= 0\\
yz(y-z) + zx(z-x) + xy(x-y) &= 0\\
(y-z)(z-x)(x-y) &= 0
\end{aligned}$$

$$y = z, \qquad z = x, \qquad x = y.$$

O halde geometrik yer yüksekliklerin bileşimi olan nokta kümesidir.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal.*)

Y88. $u = u(x)$, reel sayılar kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, w ve z fonksiyonları

$$\begin{aligned}
w(x) &= \int\left(\int [2(u')^2 + 2u''u]\, dx\right) dx,\\
z(x) &= \int\left(\int \left[\frac{uu'' - (u')^2}{u}\right] dx\right) dx
\end{aligned}$$

olarak tanımlanıyor. $\sqrt[2z]{w}$ değerini hesaplayınız. (*Dinçer Akay*)

Çözüm. $(uu')' = (u')^2 + uu''$ ve $(u^2)' = 2uu'$ olduğu gözönüne alınarak

$$w = \int\left(\int 2(uu')'\, dx\right) dx = 2\int (uu')\, dx = u^2,$$

$(\frac{u'}{u})' = \frac{uu''-u'^2}{u^2}$ ve $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ olduğu düşünülerek,

$$z = \int\left(\int \left(\frac{u'}{u}\right)' dx\right) dx = \int \frac{u'}{u}\, dx = \ln u$$

olduğu görülür. Buradan

$$\sqrt[2z]{w} = (u^2)^{\frac{1}{2\ln u}} = u^{\frac{1}{\ln u}} = e$$

elde edilir.

(**Çözenler:** *Atasağan Baykal, Şuayyip Salim Özkurt, Emre Alkan.*)

Y89. O merkezli ve çapı $[BC]$ olan birim yarıçaplı bir yarıçemberin üzerinde bir A noktası alınıyor ve ABC dik üçgeni çiziliyor. A noktası yayı çizerken, homojen kabul edilen $[AB] \cup [AC]$ kırık doğrusunun G ağırlık merkezinin geometrik yerinin denklemini elde ediniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. $|AC| = b$, $|AB| = c$ diyelim. $|BC| = 2$'dir. $[AC]$'nin ağırlık merkezi B' noktasında, $[AB]$'nin ağırlık merkezi ise C' noktasında olmak üzere, arasından G ağırlık merkezi vektörel olarak

$$\frac{G - C'}{b} = \frac{B' - G}{c}$$

eşitliğini sağlar. Bu da

$$\begin{aligned}(b+c)G &= bB'+cC'\\ (\sin B+\cos B)G &= (\sin B)B'+(\cos B)C'\\ 2(\sin B+\cos B)G &= (\sin B)(A+C)\\ &\quad +(\cos B)(A+B)\end{aligned}$$

verir. O'yu koordinat düzleminin merkezi kabul eder ve G'nin koordinatlarına (x,y) dersek, buradan

$$\begin{aligned}2x &= \frac{\sin B(\cos 2B+1)+(\cos B)(\cos 2B-1)}{\cos B+\sin B}\\ &= \frac{\sin B(2\cos^2 B)-\cos B(2\sin^2 B)}{\cos B+\sin B}\\ &= \frac{\sin 2B(\cos B-\sin B)}{\cos B+\sin B}\\ 2y &= \frac{\sin B\sin 2B+\cos B\sin 2B}{\cos B+\sin B}\\ &= \frac{\sin 2B(\cos B+\sin B)}{\cos B+\sin B}=\sin 2B\\ y &= \frac{\sin 2B}{2}=\frac{2\sin B\cos B}{2}=\sin B\cos B\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y^2} &= \left(\frac{x}{y}\right)^2=\left(\frac{\cos B-\sin B}{\cos B+\sin B}\right)^2\\ &= \frac{1-2\cos B\sin B}{1+2\cos B\sin B}\\ x^2 &= y^2\frac{1-2y}{1+2y}\end{aligned}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Uğur Yıldıran, Tamer Adanır, Çağatay Candan, Atasağun Baykal, Ergün Yaraneri.*)

Y90. Gerçel sayılar üzerinde tanımlı, gerçel değerli bir f fonksiyonu ve bir pozitif a sabiti için

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$$

denklemi her x için geçerli olsun. f fonksiyonunun periyodik olduğunu (yani, her x için $f(x+b)=f(x)$ veren bir b sayısının varlığını) gösteriniz. Ayrıca $a=1$ için istenilen özelliklerde ve sabit olmayan bir fonksiyon örneği veriniz.

Çözüm. Verilen denklem $f(x+a)\geq\frac{1}{2}$ olduğunu gösterir ve böylece her x için $f(x)\geq\frac{1}{2}$ olur. $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$ dersek, her x için $g(x)\geq 0$ olur ve verilen denklem

$$\begin{aligned}g(x+a) &= \sqrt{g(x)+\frac{1}{2}-[g(x)]^2-g(x)-\frac{1}{4}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{4}-[g(x)]^2}\end{aligned}$$

halini alır. Kare alarak

$$[g(x+a)]^2=\frac{1}{4}-[g(x)]^2, \qquad (*)$$

ve bu eşitlikler her x için doğru olduğundan x yerine $x+a$ koyarak $[g(x+2a)]^2=\frac{1}{4}[g(x+a)]^2$ elde ederiz. Son ikisi $[g(x+2a)]^2=[g(x)]^2$ verir. g her yerde pozitif olduğundan karekök alır ve $g(x+2a)=g(x)$ buluruz. Bu ise $f(x+2a)-\frac{1}{2}=f(x)-\frac{1}{2}$ ve her x için $f(x+2a)=f(x)$ demektir. Yani, f periyodiktir ve periyodu da $2a$'dır.

Verilen denklemin bütün çözümlerini bulmak için $h(x)=4[g(x)]^2-\frac{1}{2}$ yazarız ve bu $(*)$'ı $h(x+a)=-h(x)$ haline sokar. Karşıt olarak, eğer $h(x)\geq-\frac{1}{2}$ ise ve bu son denklemi sağlarsa, $g(x)$ de $(*)$'ı sağlar. Böylece kolaylıkla bir h bulup ondan f'yi elde edebiliriz.

$a=1$ için $h(x)=\sin^2\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2}$ fonksiyonunu kullanabiliriz. Buradan $g(x)=\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$ ve de $f(x)=\frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|+\frac{1}{2}$ elde ederiz.

(**Çözenler:** *Muammer Keleş, Tamer Adanır, Murat Aygen, Uğur Yıldıran, Atasağun Baykal, Seyhan Kesim.*)

KAYNAKÇA

[1] H. Demir, *Bazı Ortalamalar, Matematik Dünyası*, 1, sayı 1, 17–21 (1991).