PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A91. Kenar uzunluğu 23 olan kare içinde 99 nokta gelişigüzel seçilmiştir. Çevre uzunluğu 14'ten küçük olan ve köşeleri seçilen noktalar üzerinde bulunan en az bir üçgen bulunabileceğini gösteriniz. (*Yaman Duruman*)

A92. $\cos 3x - \cos 2x + \cos x - 1 = 0$ denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki çözümlerini bulunuz. (*Hüseyin Demir*)

A93. $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{3}$ denklemini $\cos x$ için çözünüz (*Hüseyin Demir*)

A94. Atılan beş tavla zarının toplamlarının çarpımlarından küçük olması olasılığını hesaplayınız.

A95. Düzlemde her iki koordinatı da tamsayı olan noktalara örgü noktaları denir. Düzlemde $(0,0)$'dan geçen her doğru mutlaka bir örgü noktasından geçer mi? (*Şafak Alpay*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y91. ABC, kenar uzunlukları a, b, c ve alanı S olan bir üçgen olsun. b, c; c, a ve a, b çiftlerinin geometrik ve aritmetik ortalamalarına sırayla a_1, b_1, c_1 ve a_0, b_0, c_0 diyelim.

(a) Kenar uzunlukları a_1, b_1 ve c_1 olan bir $A_1B_1C_1$ üçgeninin varlığını gösterip ABC ve $A_1B_1C_1$'in S ve S_1 alanları arasında $S_1 \geq S$ bağıntısının bulunduğunu ispatlayınız.

(b) Kenar uzunlukları a_0, b_0, c_0 olan bir üçgenin varlığını gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Y92. Dar açılı bir ABC üçgeninin I_a dış çemberinin bulunduğu bölgede bir köşesi $[BC]$'nin D orta noktası ve iki köşesi AC ve AB doğruları üzerinde bulunan kare düşünülüyor.

(a) Kareyi pergel ve cetvelle çiziniz.

(b) Karenin kenar uzunluğunu hesaplayınız. (*Hüseyin Demir*)

Y93. 1'den k'ye kadar numaralanmış k tane oksijen tüpü farklı basınçta doldurulmuştur. k numaralı tüpün basıncı p_k olmak üzere $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ olduğu bilinmektedir. Tüplerden istenildiği kadarı paralel bağlanabilmekte ve bu halde bağlanan tüplerin basınçları, ortalama basınca eşit olacak şekilde dengelenmektedir. Tüpleri bağlayıp çözerek, 1 numaralı tüpün basıncının alabileceği en yüksek değeri bulunuz.

Y94. Bir dışbükey 12 yüzlüde

(a) bütün yüzler ikizkenar üçgendir,

(b) her kenar ya x ya da y birim uzunluğundadır,

(c) her köşede ya 3 ya da 6 kenar buluşur,

(d) bütün yanal açılar eşittir.

$y : x$ oranını hesaplayınız.

Y95. Kenar uzunlukları $|BC| = 5$, $|CA| = 3$, $|AB| = 4$ birim olan bir ABC üçgeninde, A, B, C'nin sırası ile B, C, A'ya göre simetrikleri A', B', C' ise A', B', C' üçgeninin R' çevrel yarıçapını hesaplayınız. (*Hüseyin Demir*)

ÇÖZÜMLER

A81. Birbirine eş olan dört çemberden üçünün her biri, verilen bir ABC üçgeninin içinde olup, açılardan birinin iki kenarına teğettir. Dördüncü çember bu üç çembere teğet ise bu çemberlerin cetvel ve pergelle çizilebileceğini gösteriniz.

Çözüm. Kenarlara teğet olan çemberlerin merkezleri A', B', C' olsun. ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin kenar uzunlukları a, b, c ve a', b', c'; ortak yarıçap da r ise, $a = x\cot\frac{B}{2} + a' + x\cot\frac{C}{2} = x(\frac{s-b}{r} + \frac{s-a}{r}) + a' = \frac{a}{r}x + a'$ ve $a' = a(1 - \frac{x}{r})$ elde edilir. (Burada $x = |BB'| = |CC'| = |AA'|$ ve $S = (a+b+c)/2$'dir.) Dördüncü çemberin merkezi O' ise, $|O'A| = |O'B'| = |O'C'| = 2r$ nedeniyle, bu nokta $A'B'C'$'nün çevrel çember merkezidir. $A'B'C' \sim ABC$ benzerliği ve $a' = a(1 - \frac{x}{r})$'den $\frac{2x}{R} = 1 - \frac{x}{r} \Longrightarrow x(\frac{1}{r} + \frac{2}{R}) = 1 \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{r} + \frac{2}{R} \Longrightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R/2}$ bulunur. O halde $2x$ uzunluğu r ile $R/2$'nin harmonik ortalaması olup çizilebilir [1].

(**Çözenler:** *Murat Aygen, Özgür Sümer, Atasağun Baykal, Cüneyt Gürsoy, Emre Alkan, Ruhi Tanbar.*)

A82. Tabanı $[BC]$ ve A açısı geniş olan bir ABC üçgeninin A köşesi ve yan kenarlarının birer kısmı çizim kağıdının dışına taşmıştır. Bu üçgenin $[AD]$ kenarortayını, $[AE]$ iç açıortayını ve $[AF]$ yüksekliğini belirleyiniz.

Çözüm. B'den CA'ya ve C'den BA'ya çizilen paralel doğrular A''nde kesişsinler. $A'BC \sim ACB$ olup $A'BC$ üçgeninde $[A'D]$, $[A'E]$, $[A'F]$, kenarortayı, iç açıortayı ve yüksekliği çizilir. $[A'D]$'nin uzantısı ABC'nin aranılan kenarortayı, E ve F'nin D'ye göre simetrikleri E' ve F' ise, E' ve F''nden $A'E$'ye ve $A'F$'ye çizilen paralel doğrular cevap olur.

(**Çözenler:** *Özgür Sümer, Atasağun Baykal, Cüneyt Gürsoy, Ergün Yaraneri, Murat Aygen.*)

A83. O kesişme noktası çizim kâğıdının dışına düşen a ve b doğruları ve bunların dışında bir C noktası veriliyor. CO doğrusunu cetvel ve pergelle belirleyiniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Noktadaş üç doğru ile ilgili teoremlerden istifade edebiliriz. Örneğin, verilen üç çemberin ikililerinin kuvvet eksenlerinin noktadaşlığını kullanabiliriz. Bunun için a'yı P ve Q noktalarında, b'yi R ve S'de kesen bir çember çizer, CPQ ve CRS çemberlerinin ikinci D arakesit noktasını buluruz. CD doğrusu aranılan doğru olur.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Özgür Sümer, Cüneyt Gürsoy, Ergün Yaraneri, Ülkü Öztaş, Atasağun Baykal, Murat Aygen.*)

A84. İki ve üç basamaklı sayılarla ilgili olarak

$$\begin{aligned} ABC &= (DE)^2 \\ CBA &= (ED)^2 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Eşitlikleri

$$\begin{aligned} 100A+10B+C &= 100D^2+20ED+E^2 \\ 100C+10B+A &= 100E^2+20ED+D^2 \end{aligned}$$

biçiminde yazıp taraf tarafa çıkarırsak, $A-C=(D-E)(D+E)$ elde ederiz. Burada $A \geq C$ ve $D \geq E$ alabiliriz. $D \leq 3$ ve $E \leq 3$ olup, DE için çözümler 32'den küçük olan $31, 22, 21, 11$'dir. Özetle $961 = 31^2$, $169 = 13^2$, $484 = 22^2$, $441 = 21^2$, $144 = 12^2$, $121 = 11^2$ çözümlerdir.

(**Çözenler:** *İlker Bağrıaçık, Namık Gök, Ergün Yaraneri, Seyhun Kesim, Ruhi Tabur, Atasağun Baykal, Cüneyt Gürsoy, Özgür Sümer, Ali Satılmış, Emre Alkan, Levent Koçoğlu.*)

A85. $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ sayısını n, m tamsayı olmak üzere $n+m\sqrt{2}$ şeklinde ifade ediniz.

Çözüm. $9+4\sqrt{2} = 1+2\cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2 = (1+2\sqrt{2})^2$ olduğundan, aradığımız sayı $x = \sqrt{13+30\sqrt{2+1+2\sqrt{2}}}$'dir. Benzer yolla $2+1+2\sqrt{2} = 1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 = (1+\sqrt{2})^2$ olur. O halde $x = \sqrt{13+30(1+\sqrt{2})} = \sqrt{43+30\sqrt{2}}$ bulunur. $43+30\sqrt{2} = 25+2\cdot 5\cdot 3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2 = (5+3\sqrt{2})^2$ ve $x = 5+3\sqrt{2}$ olacaktır.

(**Çözenler:** *Ali Satılmış, Ruhi Tabur, Levent Koçoğlu, Hasan Kullap, Özgür Sümer, Cüneyt Gürsoy, Seyhun Kesim, Namık Gök, Fikret Barlas, Ergün Yaraneri, Ülkü Öztaş, İlker Bağrıaçık, Murat Aygen, Atasağun Baykal.*)

Y81. F odağı ve d doğrultmanı ile belirli parabol ile bir m uzunluğu verildiğinde, parabolün odağından geçen m uzunluktaki bir kirişin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Parabolün Oxy dik koordinat sistemindeki denklemi $4ay = x^2$ $(a > 0)$ olsun. Odak $F(a, 0)$ olur. Odaktan geçip x eksenine paralel olan kiriş $[U_0V_0]$ ise, $V_0(-2a, a)$ ve $U_0(2a, a)$ olduğu görülür. Aranılan kirişlerden biri $[UV]$ ve $\widehat{U_0FU} = \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq \pi/2)$ olsun. $|FU| = r$, $|FV| = s$ koyarsak $U(r\cos\alpha, a + r\sin\alpha)$ bulunur. Bunlar parabolün denkleminde yerine konursa, $4a(a + r\sin\alpha) = r^2\cos^2\alpha$, yani $(\cos^2\alpha)r^2 - 2(2a\sin\alpha)r - 4a^2 = 0$ elde edilir. Bu da r için $r = 2a\frac{\sin\alpha\pm 1}{\cos^2\alpha} = 2a\frac{\sin\alpha\pm 1}{1-\sin^2\alpha}$ verir. Birinci kök $r(\alpha) = \frac{2a}{1-\sin\alpha} > 0$ olup, $r(\alpha+\pi)$ de $s = |FV|$'yi verir. O halde $u = r + s = \frac{2a}{1-\sin\alpha} + \frac{2a}{1+\sin\alpha} = \frac{4a}{\cos^2\alpha}$ ve dolayısıyla $\cos\alpha = \frac{4a}{u} \leq 1$ olup, $u \geq 4a$ için çizim vardır.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Atasağun Baykal.*)

Y82. Eşkenar bir ABC üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir P noktasına göre ayak üçgeni DEF ise ve AD, BE, CF doğruları noktadaş ise P'nin geometrik yerini belirleyiniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. AD, BE, CF doğruları bir Q noktasında kesişsinler. QBC, QCA, QAB üçgenlerinin alanları sırasıyla x, y, z olsun. ABC'nin kenar uzunluğu a ve alanı s ise, D'nin $[BC]$'yi bölme oranı $\lambda = \frac{|BD|}{z} = \frac{|DC|}{y} = \frac{a}{y+z} = \frac{a}{s-x}$ olup $|DB| = \frac{az}{s-x}$ ve $|DC| = \frac{ay}{s-x}$ bulunur. E ve F'nin $[CA]$ ve $[AB]$'yi bölme oranlarından

$$|EC| = \frac{ax}{s-y}, \qquad |EA| = \frac{az}{s-y}$$

$$|FA| = \frac{ay}{s-z}, \qquad |FB| = \frac{ax}{s-z}$$

elde edilir. DP, EP, FP dikmelerinin noktadaşlığı ile [2]'deki formülden

$$\sum \left[\frac{a^2y^2}{(s-x)^2} - \frac{a^2yz^2}{(s-x)^2} \right] = 0$$

olarak yazılır. Bu da $\sum \frac{y-z}{s-x} = 0$ olarak kısaltılıp $\sum (y-z)(s-y)(s-z) = 0$ eşitliğini verir. Buradan aşağıdakileri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \sum (y-z)[s^2 - (y-z)s + yz] = 0 \\
\Longrightarrow\ & \sum (y-z)[s^2 - (s-x)s + yz] = 0 \\
\Longrightarrow\ & \sum (y-z)(xs + yz) = 0 \\
\Longrightarrow\ & s\sum x(y-z) + \sum yz(y-z) = 0 \\
\Longrightarrow\ & yz(y-z) + zx(z-x) + xy(x-y) = 0 \\
\Longrightarrow\ & (y-z)(z-x)(x-y) = 0 \\
\Longrightarrow\ & y = z, \quad z = x, \quad x = y.
\end{aligned}$$

O halde geometrik yer yüksekliklerin bileşimi olan nokta kümesidir.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Murat Aygen, Atasağun Baykal.*)

Y83. $1, 2, \ldots, n$ tamsayılarını rastgele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şeklinde sıralayıp $T = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - a_1|$ toplamını hesaplarsak, elde edebileceğimiz en büyük T değerini bulunuz.

Çözüm. Mutlak değerleri açarsak T toplamında her a_j sayısı iki kere görülür ve $2n$ terimin yarısı artı, yarısı ise eksi işaretlidir. Toplamın en büyük olması için eksi işaretler küçük sayılara ait olmalıdır. $n = 2k$ çift ise, $1, 2, \ldots, k$'nın işaretleri hep eksi ve $k+1, k+2, \ldots, 2k$'nın işaretleri hep artı olduğu durumda $T = 2[(k+1) + (k+2) + \cdots + 2k] - 2(1 + 2 + \cdots + k) = 2k^2 = \frac{n^2}{2}$ toplamı, örneğin, $1, k+1, 2, k+2, \ldots, k, 2k$ sıralaması ile elde edilir. $n = 2k+1$ tek ise, $1, 2, \ldots, k$ sayıları iki kez eksi, $k+2, k+3, \ldots, 2k+1$ sayıları iki kez artı ve $k+1$ bir kez eksi, bir kez artı olacak bir sıralama için, $T = 2[(k+2) + (k+3) + \cdots + (2k+1)] + (k+1) - 2(1+2+\cdots+k) - (k+1) = 2k(k+1) = \frac{n^2-1}{2}$ bulunur. Bu toplam, örneğin, $1, k+2, 2, k+3, \ldots, k, 2k+1, k+1$ sıralamasıyla elde edilir.

(**Çözenler:** *Emre Alkan, Ergün Yaraneri, Atasağun Baykal, İlker Bağrıaçık, Seyhun Kesim.*)

Y84. Her $x \in [-1, 1]$ için $f(f(x)) = -x$ koşulunu sağlayan bir $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ fonksiyonu var mıdır? (*H. Turgay Kaptanoğlu*)

Çözüm. İstenen fonksiyon birebir olacaktır, çünkü $f(x_1) = f(x_2)$ ise $-x_1 = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = -x_2$, yani $x_1 = x_2$ olmalıdır. f sürekli olsaydı, sürekli ve birebir bir fonksiyon monoton (artan ya da azalan) olacağından $f \circ f$ artan olacaktı. (İki artan ya da iki azalan fonksiyonun bileşkesi artandır.) Halbuki $f(f(x)) = -x$ azalan bir fonksiyondur; o halde istenen koşulu sağlayan *sürekli* bir fonksiyon yoktur. Süreksiz fonksiyonlarda ise çeşitli çözümler bulunabilir, örneğin

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2}, & -1 \le x < -\frac{1}{2} \text{ ise;} \\ x - \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \le x < 0 \text{ ise;} \\ 0, & x = 0 \text{ ise;} \\ x + \frac{1}{2}, & 0 < x \le \frac{1}{2} \text{ ise;} \\ -x + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \le 1 \text{ ise;} \end{cases}$$

istenen koşulu sağlar. $[-1, 1]$ aralığında f monoton değildir; bu nedenle de $f \circ f$'nin artan olması gerekmez.

(**Çözenler:** *Sultan Yamak, Atasağun Baykal.*)

Y85. Bir X kümesinin h elemanlı k tane alt kümesi $X_1, X_2, \ldots, X_k$ veriliyor: $X_i \subseteq X$, $|X_i| = h$, $i = 1, \ldots, k$. $\min |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k|$'nin, $k \le C(m, h)$ özelliğine sahip en küçük m sayısına eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $X_1 \cup \cdots \cup X_k = Y \subset X$ diyelim. $X_i \subset Y$ ve $|X_i| = h$ $(i = 1, \ldots, k)$ olduğundan, $k \le C(|Y|, h)$ bulunur. Buradan da $\min |Y|$'nin $C(m, h) \ge k$ özelliğini sağlayan en küçük m olduğu anlaşılır.

Çözenler: *Atasağun Baykal, Emre Alkan.*)

KAYNAKÇA

[1] H. Demir, *Bazı Ortalamalar, Matematik Dünyası*, **1**, Şubat, 17–21 (1991).

[2] H. Demir, *Bir Üçgende Noktadaş Dikmeler, Matematik Dünyası*, **2**, Şubat, 5–7 (1992).