35. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI SORULARI

Derleyen: Ali Doğanaksoy *

35. Uluslararası Matematik Olimpiyadı, 12–19 Temmuz 1994 tarihleri arasında Hong Kong'da yapıldı. Bu olimpiyatta ülkemizi Hasan Fehmi Ateş, Murat Atlamaz, Rıza Ertuğrul, Zafer Şimşek, Bayram Yenikaya ve Bilal Yurdakul'dan oluşan takım temsil etti. Ateş, Atlamaz, Ertuğrul ve Yenikaya bronz madalya, Şimşek ve Yurdakul mansiyon kazandılar.

1. ECO (Ekonomik İşbirliği Teşkilatı) Matematik Olimpiyadı Tahran'da 17–22 Eylül 1994 tarihleri arasında yapılacak. Dergimiz yayına hazırlandığı sırada henüz başlamamış olan bu olimpiyatta yarışacak öğrencilerimiz, Halil Bayrak, Ethem Çanakoğlu, Mustafa Günseli, Ali Ekber Gürel, Caner Kazancı ve Bayram Yenikaya. Bu öğrenciler, ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarına hazırlık amacı ile 7–19 Ağustos 1994 tarihlerinde Abant İzzet Baysal Üniversitesi tesislerinde yapılan çalışma kampında yapılan sınavla belirlendi.

Bu sayımızda 35. Uluslararası Matematik Olimpiyadı'nda sorulan soruları veriyoruz.

Birinci Gün, 13 Temmuz 1994

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat. Her problem 7 puan değerindedir.

1. m ve n pozitif tamsayılar olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin farklı öyle elemanları olsun ki, $1 \le i \le j \le m$ olmak üzere $a_i + a_j \le n$ olduğu her durumda, $a_i + a_j = a_k$ olacak şekilde bir k $(1 \le k \le m)$ bulunsun.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}$$

olduğunu kanıtlayınız.

2. ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ olsun.

(i) M, BC'nin orta noktası; O da, AM doğrusu üstünde bulunan ve OB'nin AB'ye dik olmasını sağlayan nokta olsun.

(ii) Q, BC kenarı üstünde, B ve C'den farklı herhangi bir nokta olsun.

(iii) E, Q ve F aynı doğru üstünde bulunan farklı noktalar olmak üzere, E'nin AB doğrusu, F'nin de AC doğrusu üstünde bulunduğunu kabul edelim.

OQ'nun EF'ye dik olmasının, $|QE| = |QF|$ olması için gerek ve yeter bir koşul olduğunu kanıtlayınız.

3. Her k pozitif tamsayısı için, $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ kümesine ait ve 2 tabanına göre yazılımlarında tam olarak üç tane 1'in geçtiği elemanların sayısı $f(k)$ olsun.

(a) Her m pozitif tamsayısı için, $f(k) = m$ olacak şekilde en az bir k pozitif tamsayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

(b) $f(k) = m$ eşitliğinin tam olarak bir k için sağlandığı tüm m pozitif tam sayılarını bulunuz.

İkinci Gün, 14 Temmuz 1994

Süre: $4\frac{1}{2}$ saat. Her problem 7 puan değerindedir.

4. $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ sayısının bir tamsayı olmasını sağlayan tüm (m, n) sıralı pozitif tamsayı ikililerini bulunuz.

5. S, -1'den kesin büyük reel sayıların kümesi olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan tüm $f : S \to S$ fonksiyonlarını bulunuz:

(i) S'ye ait her x, y için, $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ olup,

(ii) $\dfrac{f(x)}{x}$, $-1 < x < 0$ ve $0 < x$ aralıklarının her birinde kesin artan bir fonksiyondur.

6. Aşağıdaki koşulu sağlayan ve pozitif tamsayılardan oluşan bir A kümesinin var olduğunu gösteriniz:

Tüm elemanları asal sayılar olan sonsuz her S kümesi için, m ve n sayılarından her birinin S'ye ait k farklı elemanın çarpımı olmasını sağlayacak biçimde $K \le 2$, $m \in A$ ve $n \notin A$ pozitif tamsayıları vardır.

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi