Yarışma 4

1. $2^{x-3} = 1$ ve $5^{y+2} = 1$ ise $2^x 5^y$ kaçtır?

2. Birbirini izleyen 1993 tamsayının çarpımları 0 olsun. Bu sayıların en büyüğü kaçtır?

3. N pozitif bir tamsayı ve N^{50} 16 basamaklı ise N kaçtır?

4. $y = |x+2| + |x-3|$, $x = -2$, $y = 0$ ve $x = 3$ ile belirlenen bölgenin alanı nedir?

5. 12 cm yarıçaplı daire dışına çizilen ve hipotenüsü 65 olan dik üçgenin çevresi nedir?

Yarışma 5

1. $A = 1990 \cdot 1991 \cdot 1992 \cdot 1993 \cdot 1994 \cdot 1995 \cdot 1996$ ve $B = 1993^7$ ise, hangisi daha büyüktür ?

2. x, y ve z eşit olmayan pozitif tamsayılar ise, $x + y^2 + z^3 = a$ eşitliğini sağlayan en küçük a nedir?

3. $\log_2 x + 1 = 2\log_2 x - 1$ eşitliğini çözünüz.

4. $23! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 21 \cdot 22 \cdot 23$ olarak tanımlanır. 23! sayısının birbirini izleyen sayıların çarpımı olarak üç farklı biçimde yazılabileceğini gösteriniz.

5. $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} = \dfrac{21}{x}$ için çözüm kümesini bulunuz.

6. Üçgenlerde açıortaylar karşı kenarı diğer kenarlara orantılı olarak keserler. Çevresinin bir tamsayı olduğu bir üçgende bir açıortay karşı kenarı 2 cm ve 5 cm olarak bölüyorsa, çevrenin alabileceği en büyük değer kaçtır?

KAYNAKÇA

[1] A. Doğanaksoy, *Sihirli Kareler, Matematik Dünyası*, 1, sayı 2, 6–9, 1991.

JAPONYA ÜNİVERSİTE GİRİŞ SINAVLARI

Derleyen: Şafak Alpay *

Ülkemizde olduğu gibi Japonya'da da üniversitelere kabul, yarışmacı sınavlar ile yapılıyor. Japonya'da 132 devlet üniversitesinin yanısıra 342 özel yüksek okul bulunuyor. Bu ülkedeki dört yıllık yüksek öğrenim programlarına kabul oranı %60 iken, bu oran içinde üniversitelere kabul edilenler sadece %26. Başka bir deyişle, Japonya'da yüksek öğrenim kurumlarına başvuran 1.025.000 öğrenciden 681.000'i kabul edilmiş.

Sınavlar ise iki aşamalı. Bir hükümet organınca yılda bir kez Ocak ayı ortasında yapılan ilk sınava herkes girmek zorunda. Ülkemizdeki uygulamadan farklı olarak geçerli nedenlerle bu sınava katılamayanlara bir süre sonra başka sınav verilebiliyor. Bu uygar uygulamaya ülkemizde de yer verilmesini görmek isteriz. Aşağıda örneklerini sunduğumuz ikinci aşama sınavları, üniversitelerin kendilerinin düzenlediği sınavlar. Bu sınavların tarihleri her öğrenciye en fazla iki farklı üniversitenin açtığı sınava girmesine olanak veriyor.

Üniversiteler birinci ve ikinci sınav başarılarını farklı değerlendiriyorlar. Genellikle ilk aşama başarısı %40–50, ikinci sınav başarısı %60–50 oranlarında değerlendirilirken, Tokyo Üniversitesi ilk sınavı %20, kendi verdiği sınavı ise %80 oranında değerlendiriyor. Örneklerden göreceğiniz gibi, farklı programlarda okuyacak öğrencilerin yanıtlaması gereken matematik soruları oldukça farklı.

1990 yılında üniversitelere kabul edilenlerin %6'sı sınavsız kabul edildiler. Uluslararası bilim olimpiyatlarında ülkemizi başarı ile temsil eden öğrencilerimizin de benzeri bir uygulama ile istedikleri programlara veya yarıştıkları bilim dallarındaki programlara sınavsız kabul edilmelerinin, bu öğrencilerin emeklerinin karşılığı olduğunu düşünüyorum.

Aşağıdaki sorulardan bir kısmı Matematik Dünyası'nın problemleri içinde yer alacak. Eğitici bulduğumuz bir kısmının çözümlerini ise ayrı bir yazı olarak yayımlayacağız. Önce siz bir deneyin. İyi çalışmalar!

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

TOKYO ÜNİVERSİTESİ

A Sınavı (Temel Bilimler)

Süre: 150 dakika.

1. a, b ve c pozitif gerçel sayılar olsun. xyz uzayında $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $z = c$ koşullarını sağlayan (x, y, z) noktalarının oluşturduğu D düzlemini düşünelim. P noktası, $z = c + 1$ düzlemi üzerinde olan ve

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad z = c + 1$$

elipsi üzerinde bir kez dolaşan ışının kaynağı olsun. D düzleminin, xy düzlemi üzerindeki gölgesini çiziniz ve alanını hesaplayınız.

2. p bir sabit olmak üzere, $x^3 - 3x - p = 0$ ifadesini düşünelim. $f(p)$, en büyük gerçel kök ile en küçük gerçel kökün çarpımı olsun. Eğer tek kök varsa, $f(p)$ bu kökün karesi olsun.

(a) Her p için $f(p)$'nin en küçük değerini bulunuz.

(b) $p \mapsto f(p)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

3. (a) $n = 1, 2, \ldots$ doğal sayıları için

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= p_n(\tan\theta)\cos^n\theta \\ \cos n\theta &= q_n(\tan\theta)\cos^n\theta \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan $p_n(x)$ ve $q_n(x)$ polinomlarının varlığını gösteriniz.

(b) $n > 1$ için, $p_n'(x) = nq_{n-1}(x)$ ve $q_n'(x) = -np_{n-1}(x)$ özdeşliklerini gösteriniz:

4. xy düzleminde koordinatları tamsayılar olan (m, n) noktalarına örgü noktaları diyelim. Her örgü noktasında yarıçapı r olan çemberi çizelim. Eğimi $2/5$ olan doğru, bu dairelerin bazılarını kesecektir. Bu özelliğe sahip r sayılarının en küçük değerini bulunuz.

5. $f(x)$, $0 < x_1 < x_2$ için $0 < f(x_2) < f(x_1)$ koşulunu sağlayan ve $x > 0$ için tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.

$$S(x) = \int_x^{2x} f(t)dt \qquad \text{ve} \qquad S(1) = 1$$

ise, her $a > 0$ için aşağıda belirlenen bölgelerin her birinin alanı $3S(a)$'dır:

(i) $(0, 0)$ ve $(a, f(a))$ noktalarını birleştiren doğru parçası altında kalan bölge.

(ii) $(0, 0)$ ve $(2a, f(2a))$ noktalarını birleştiren doğru parçası altında kalan bölge.

(iii) $y = f(x)$ eğrisi altında kalan alan bölge.

(a) $S(x)$ ve $f(x) - 2f(2x)$'i x'in fonksiyonu olarak ifade ediniz.

(b) $x > 0$ için $a(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n x)$ ise,

$$\int_x^{2x} a(t)\,dt$$

değerini bulunuz.

(c) $f(x)$ fonksiyonunu belirleyiniz.

B Sınavı (Beşeri Bilimler)

Süre: 100 dakika.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ ifadesinin $-\frac{7}{4} \leq x \leq 3$ aralığındaki en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

2. xyz uzayında $P(2, 0, 1)$ noktasını ve yz düzleminde $z = y^2$ eğrisini düşünelim. Q, bu eğri üzerinde olmak üzere, PQ doğrusunun xy düzlemini kestiği F noktalarını çiziniz.

3. $ABCD$, kenarları 1 ve a olan bir dikdörtgen, E noktası ise köşegenlerin kesim noktası olsun. A, B, C, D ve E noktalarında yarıçapı r olan çemberleri çizelim. Herhangi iki çemberin arakesitinin boş olacağı şekilde r'nin en büyük değerini bulunuz. $S(a)$, çemberlerin dörtgen içinde kalan toplam alanı ise, $\frac{S(a)}{a}$ ifadesinin grafiğini a'nın fonksiyonu olarak çiziniz.

4. V, tabanı kare olan düzgün bir piramit olsun. Karenin bir kenarına a diyelim. Merkezi bu piramidin tabanında olan ve her kenara değen bir top düşünelim. V'nin yüksekliğini ve top ile piramide ortak olan bölgenin hacmini bulunuz.

HOKKAIDO ÜNİVERSİTESİ

A Sınavı (Temel Bilimler ve Tıp)

Süre: 120 dakika.

1. α ve β, $x^2 - 2px + p^2 - 2p - 1 = 0$ ifadesinin kökleri olsun. p gerçel sayısının

$$\frac{1}{2}\frac{(\alpha - \beta)^2 - 2}{(\alpha + \beta)^2 + 2}$$

ifadesini tamsayı yapan değerini bulunuz.

2. t gerçel sayısı için $x(t) = \frac{2^t + 2^{-t}}{2}$ ve $y(t) = \frac{2^t - 2^{-t}}{2}$ olarak tanımlansın. $M(t)$, köşeleri $(x(t), y(t))$, $(x(t+1), y(t+1))$ ve $(x(t+2), y(t+2))$ olan üçgenin ağırlık merkezi olsun. t gerçel sayılarda gezerken, $M(t)$'nin geometrik yerini bulunuz.

3. C eğrisi $y = f(x)$ ile verilsin. $P(x,y)$ noktasında C'ye çizilen teğet, P ve $Q(1,0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasına dik ise,

(a) $y = f(x)$'nin sağladığı diferansiyel denklemi bulunuz;

(b) $y = -\frac{2}{3}x + 5$ doğrusu C'ye teğetse, C'nin denklemini bulunuz.

4. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$ değerini bulunuz.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \log k - n\log n\right] = \displaystyle\int_1^2 \log x\, dx$ olduğunu gösteriniz.

5. $O(0,0,0)$, $A(\sqrt{2},0,0)$ ve $B(0,\sqrt{2},0)$ noktaları ile çapı $\sqrt{6}$ olan bir küre verilsin. Küre merkezinin z koordinatı pozitif, küre $[OA]$, $[OB]$ ve $[AB]$ doğru parçalarına teğet olsun.

(a) Küre merkezinin koordinatlarını bulunuz.

(b) Kürenin xy düzlemi üzerinde kalan kısmının hacmini bulunuz.

B Sınavı (Temel Bilimler ve Balıkçılık)

Süre: 120 dakika.

1. α ve β, $x^2 - 2px + p^2 - 2p - 1 = 0$ ifadesinin kökleri olsun. p gerçel sayısının

$$\frac{1}{2}\frac{(\alpha-\beta)^2 - 2}{(\alpha+\beta)^2 + 2}$$

ifadesini tamsayı yapan değerini bulunuz.

2. Düzlemde $0(0,0)$, $A(1,0)$ ve $B(-1,0)$ noktaları verilsin. P noktası düzlemde hareket etsin ve $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) + 3(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 0$ koşulunu sağlasın.

(a) P noktasının geometrik yerini bulunuz.

(b) $|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$ ifadesinin en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

3. ABC üçgeninde, $\sphericalangle A = 120°$ ve $|AB|\cdot|AC| = 1$ olsun. D, A'nın açıortayı ile $[BC]$'nin kesim noktası olsun.

(a) $|AB| = x$ ise, $|AD|$'yi x cinsinden bulunuz.

(b) AD'yi en büyük yapan x değerini bulunuz.

4. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$ değerini bulunuz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \log k - n\log n\right] = \displaystyle\int_1^2 \log x\, dx$ olduğunu gösteriniz.

5. $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$ ve $B(0,4,0)$ noktaları ile çapı 2 olan bir küre verilsin. Küre merkezinin z koordinatı pozitif, küre $[OA]$, $[OB]$ ve $[AB]$ doğruparçalarına teğet ise, küre merkezinin koordinatlarını bulunuz.

C Sınavı (Beşeri Bilimler)

Süre: 90 dakika.

1. α ve β, $x^2 - 2px + p^2 - 2p - 1 = 0$ ifadesinin kökleri olsun. p gerçel sayısının

$$\frac{1}{2}\frac{(\alpha-\beta)^2 - 2}{(\alpha+\beta)^2 + 2}$$

ifadesini tamsayı yapan değerini bulunuz.

2. Düzlemde $0(0,0)$, $A(1,0)$ ve $B(-1,0)$ noktaları verilsin. P noktası düzlemde hareket etsin ve $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}) + 3(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 0$ koşulunu sağlasın.

(a) P noktasının geometrik yerini bulunuz.

(b) $|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$ ifadesinin en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

3. n, 2'den büyük bir tamsayı ise, tümevarımla

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2$$

olduğunu gösteriniz.

4. $f(x) = ax + b$ ve

$$F(x) = x\int_1^{2x+3} f(t)\, dt$$

olsun. $F(1) = 2$ ve $F'(0) = -10$ ise, $f(x)$'i bulunuz.

SHIGA ÜNİVERSİTESİ

A Sınavı (Temel Bilimler)

Süre: 90 dakika.

1. α ve β, $x^2 - px + 1 = 0$ denkleminin çözümleri olsun. α' ve β' de $x^2 - x + q = 0$ denkleminin çözümleri olsun.

$$(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\beta)(\beta'-\alpha)(\beta'-\beta)$$

ifadesini p ve q cinsinden bulunuz.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ve $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ise, a ve b sayılarını bulunuz.

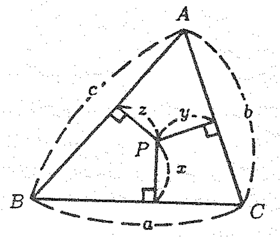
3. $x - 2y^2 \geq 0$ ve $1 - x - |y| \geq 0$ eşitsizliklerinin sağlandığı bölgeyi ve alanını bulunuz.

4. $\{a_n\}$ dizisi $n \geq 1$ için

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \frac{n+1}{n+2}$$

eşitliğini sağlıyorsa, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ toplamını bulunuz.

5. ABC üçgeninin kenarları a, b, c ve alanı S olsun. Üçgen içindeki bir P noktasından kenarlara çizilen diklerin uzunlukları x, y ve z olsun.



(a) S'yi, a, b, c, x, y ve z türünden ifade ediniz.

(b) P', koordinatları (x, y, z) olan nokta olsun. P, ABC üçgeni içinde gezerken, P''nün bir üçgen betimlediği gösteriniz.

(c) P, ABC üçgeninin ağırlık merkezi ise, P''nün de (b)'de elde edilen üçgenin ağırlık merkezi olduğunu gösteriniz.

B Sınavı (Ekonomi)

Süre: 100 dakika.

1. $y = \sqrt{2x-1}$ fonksiyonunun grafiğini ve $y = x + k$ doğrusunu düşünelim. k sabitini değiştirerek iki eğrinin kesim noktalarının sayısını tartışınız.

2. Bir ABC üçgeninde Q, $[AC]$ kenarı üzerinde $|AQ| : |QC| = 3 : 4$, P ise $[BQ]$ kenarı üzerinde $|BP| : |PQ| = 7 : 2$ olacak şekilde noktalar ve O herhangi bir nokta olsun.

(a) $\overrightarrow{OQ} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OC}$ ifadesini α ve β rasyonel sayılar iken bulunuz.

(b) l, m ve n rasyonel sayılar olmak üzere, $\overrightarrow{OP} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$ ifadesini bulunuz.

3. C açısı $90°$ olan bir ABC üçgeninde hipotenüsün uzunluğu $|AB| = a$ olsun.

(a) D iççemberin $[AB]$ kenarına teğet olduğu nokta ise, $|AD| = \frac{1}{2}(|AB|+|AC|-|BC|)$ eşitliğini kanıtlayınız.

(b) θ, A açısının yarısı ise, iççemberin yarıçapı r'yi a ve θ cinsinden bulunuz.

(c) r'nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

4. Her x için $f(x)$, $(x-a)^2$ ve $(x-a-2)^2$ sayılarının küçük olanı olsun.

$$F(a) = \int_0^1 f(x)dx$$

ise, $F(a)$'nın $-2 \leq a \leq 2$ üzerinde alacağı en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

SHIGA TIP FAKÜLTESİ

Süre: 120 dakika.

1. (a) a ve b doğal sayılar olmak üzere $b \leq a^2$ ise, $\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}$'nin doğal sayı olması için gerek ve yeter koşulun $n^2 < a \leq 2n^2$ ve $b = 4n^2(a^2-n^2)$ olmasını sağlayan bir n doğal sayısının varlığı olduğunu gösteriniz.

(b) $\sqrt{30+\sqrt{b}} + \sqrt{30-\sqrt{b}}$ ifadesini tamsayı kılan b doğal sayılarını bulunuz.

2. ABC üçgeninin zaman t ile değiştiğini, ancak bu değişimlerde θ ile göstereceğimiz A açısının hep dar açı kaldığını ve üçgenin alanının değişmediğini varsayalım. $a = |BC|$, $b = |CA|$ ve $c = |AB|$ alalım.

(a) $\frac{d\theta}{dt}$'yi, b, c, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ ve θ türünden bulunuz.

(b) $\frac{da}{dt}$'yi, b, c, $\frac{db}{dt}$, $\frac{dc}{dt}$ ve θ türünden bulunuz.

(c) ABC üçgeninin kenar uzunluğu 10 olan eşkenar üçgen olduğu durumda $\frac{db}{dt} = 2$ ve $\frac{dc}{dt} = -1$ ise, $\frac{d\theta}{dt}$ ve $\frac{da}{dt}$'yi bulunuz.

3. $A(s, 0)$ $(0 \leq s \leq 1)$, x ekseni üstünde bir nokta ve $B(0, t)$ $(0 \leq t \leq 1)$, y ekseni üstünde bir nokta olmak üzere $[AB]$ doğru parçası uzunluğu her zaman 1 birim kalacak şekilde değişsin.

(a) $[AB]$ doğru parçası ile $0 \leq x_0 \leq s$ olmak üzere $x = x_0$ doğrusunun kesim noktasının y koordinatını s ve x_0 türünden bulunuz.

(b) (x, y), AB doğru parçası üstündeyken, x'in ve y'nin alabileceği olası değerleri eşitsizlikler ile belirtiniz.

4. $\Pi_1 : ax+y+z = a$ ve $\Pi_2 : x-ay+az = 1$ düzlemlerinin arakesitleri l doğrusu olsun.

(a) l için bir yön vektörü bulunuz.

(b) a değişirken l bir yüzey belirler. (x, y), bu yüzey ile $z = t$ düzleminin arakesitindeki nokta olsun. x ve y arasındaki ilişkiyi belirleyen denklemi bulunuz.

(c) $x = 0$ ve $x = 1$ düzlemleri ve (b)'de bulunan yüzey ile belirlenen hacmi, t değişkenine bağlı olarak bulunuz.