İLGİNÇ GEOMETRİ PROBLEMLERİ

Emre Alkan *

Bu yazıda okuyucuya bir dizi ilginç problem sunmaya çalışacağız. P. Erdős'e ait iki güzel problemle başlayalım.

Problem 1. *Geniş açılı olmayan, çevrel ve iç yarıçapları R ve r, yükseklikleri h_a, h_b, h_c olan bir ABC üçgeninde $R + r \leq \max\{h_a, h_b, h_c\}$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. ABC üçgeninin ortosantrını (yüksekliklerinin kesim noktasını) ve çevrel çember merkezini H ve O ile gösterelim. Şu teoremleri gözönüne alalım.

(i) O'nun ABC'nin kenarlarına uzaklıklarının toplamı $R + r$'dir.

(ii) O'dan kenarlara inilen dikme ayakları A', B', C' olsun. Bu durumda $HA = 2 \cdot OA'$, $HB = 2 \cdot OB'$, $HC = 2 \cdot OC'$ eşitlikleri geçerlidir.

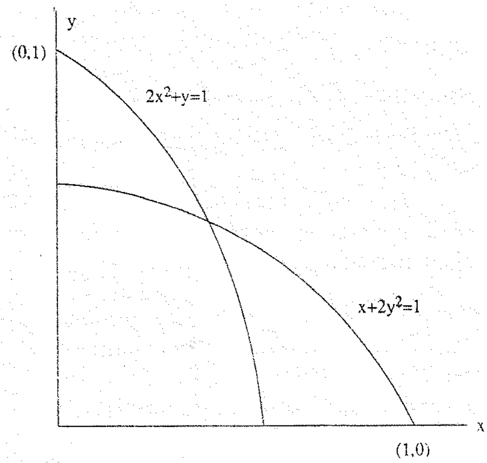
(iii) H'nin kenarlara göre simetrikleri çevrel çember üzerindedir.

Bu teoremlerin ispatlarını okuyucuya bırakacağız.

Üçgenin açıları için $A \leq B \leq C$ alalım. Böylece $\max\{h_a, h_b, h_c\} = h_a$ olur. Ortosantrın BC kenarına göre simetriği H' olsun. (i), (ii) ve (iii) kullanılarak $R + r \leq h_a$ eşitsizliğinin $BH' + CH' \leq AH'$ eşitsizliğine dönüştüğü gözlenebilir. Sinüs teoremi yardımıyla bu eşitsizliğin $\cos B + \cos C \leq AH'$ eşitsizliğine dönüştüğü gözlenebilir. Kosinüs teoremi yardımıyla bu eşitsizlik $\cos B + \cos C \leq \cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C$ eşitsizliğine dönüşür. $\cos B = x$ ve $\cos C = y$ alalım. Böylece $x + y \leq xy + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}$. Üçgen geniş açılı olmadığından $x \geq 0$, $y \geq 0$ kısıtlamaları var. Ayrıca $2B \geq \pi - C$ ve $2C \geq \pi - B$ olduğundan, $\cos B \leq \sin \frac{C}{2}$ ve $\cos C \leq \sin \frac{B}{2}$, yani $2x^2 + y \leq 1$ ve $x + 2y^2 \leq 1$ kısıtlamaları da elde edilir.

Şimdi

$$f(x, y) = xy + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} - x - y$$



fonksiyonunun $x = 0$, $y = 0$, $2x^2 + y = 1$ ve $x + 2y^2 = 1$ ile belirli olan bölgede minimum değerini arayalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= y - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\sqrt{1 - y^2} - 1 = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x - \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}\sqrt{1 - x^2} - 1 = 0
\end{aligned}$$

şartlarından

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - y}\left(\sqrt{1 - y}\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 + y}\right) &= 0 \\
\sqrt{1 - x}\left(\sqrt{1 - x}\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 + x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sqrt{1 - y}\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 + y} = 0$ veya $y = 1$ olmalıdır. $y = 1$ ise, bu ikinci eşitlikte kullanılarak $x = 1$ veya $x = -1$ elde edilir. $x \geq 0$ olduğundan $(1, 1)$ çifti geçerlidir. Fakat bu nokta bölgeye dahil değildir. Diğer olasılıklar da incelenirse tek mümkün çözümün $(1, 1)$ olduğu anlaşılır. Şu halde minimumu bölgenin sınırlarında aramalıyız.

$x = 0$ olsun. $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2} - y$ ve $0 \leq y \leq 1$ için $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} - 1 = 0$

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğrencisi

olduğundan çözüm yok. $y = 0$ olunca da minimum adayı yok.

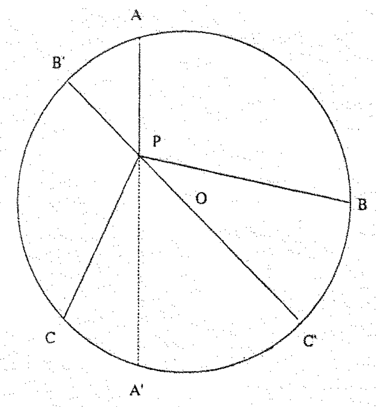
$2x^2+y = 1$ olsun. $f(x,y) = -4x^3+2x^2+2x-1$ ve $x \geq 0$ için $-6x^2+2x+1 = 0$ olduğundan $x = \frac{1+\sqrt{7}}{6} \cong 0.6$ elde edilir. Bu bir minimum adayıdır. Bu durumda $f(x,y) \cong 0.06$ bulunur. $x + 2y^2 = 1$ olunca da aynı duruma varılacaktır.

Son olarak da kritik noktalara bakalım. $f(0,0) = 1$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) = 0$, $f\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$, ve parabollerin kesim noktasında $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$. Şu halde bu bölgede $f(x,y) \geq 0$ olduğunu gözlemiş olduk.

$R + r \leq \max\{h_a,h_b,h_c\}$'de eşitlik hali ABC eşkenarken veya ikizkenar dik üçgenken sağlanacaktır.

Problem 2. *Köşeleri birim çember üzerinde olan bir ABC üçgeninin içinde alınan bir P noktası için $PA \cdot PB \cdot PC < \frac{32}{27}$ olduğunu ve $\frac{32}{27}$'nin en iyi üst sınır olduğunu gösteriniz.*

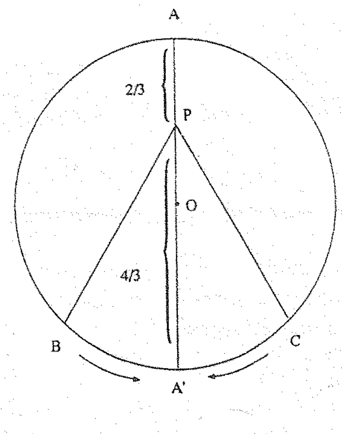
Çözüm. Birim çemberin içinde bir P noktası alalım ve P'yi merkez O ile birleştirerek $B'C'$ çapını oluşturalım. Rasgele bir ABC üçgeni aldığımız zaman P, ABC'nin içinde olduğundan A, B köşeleri çapın bir tarafına, C köşesi de çapın öteki tarafına düşecektir. Aynı nedenden dolayı C köşesi küçük $A'C'$ yayı üzerinde olamaz.



Kolayca $PC < PA'$ ve $PB < PC'$ olduğu görülebilir. $PB' = x$ alınarak,

$$PA \cdot PB \cdot PC < PA \cdot PA' \cdot PC' = x(2-x)^2$$

elde edilir. $f(x) = x(2-x)^2$'nin maksimumu $x = \frac{2}{3}$'te sağlanır ve $PA \cdot PB \cdot PC < f(\frac{2}{3}) = \frac{32}{27}$ elde edilir. $\frac{32}{27}$'nin en iyi üst sınır olduğu aşağıdaki şekilden görülmektedir.



Problem 3. *Bir ABC üçgeninde içmerkez I olsun. AI, BI, CI doğruları çevrel çemberi sırayla A', B' ve C''de kessin. $2(AI + BI + CI) \leq AA' + BB' + CC'$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. İspatını okuyucuya bırakacağımız şu teoreme bakalım.

AI, BI, CI doğruları, A', B', C' noktalarını köşe kabul eden üçgenin yükseklikleridir.

$B'C'$, AA''yü A'''de kessin. B'' ve C'''de benzer şekilde tanımlansın. Erdős-Mordell eşitsizliğine göre

$$2(IA'' + IB'' + IC'') \leq IA' + IB' + IC'.$$

$2 \cdot IA'' = AI$, $2 \cdot IB'' = BI$, $2 \cdot IC'' = CI$ olduğunu kullanarak, $AI + BI + CI \leq IA' + IB' + IC'$ ve istenen $2(AI + BI + CI) \leq A'A + B'B + C'C$'yi elde ederiz.

Problem 4. *a, b, c bir üçgenin kenarları, p, q, r ise pozitif sayılar olsun. S üçgenin alanı olmak üzere,*

$$\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{p+r}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}S$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $q+r = x$, $p+r = y$, $p+q = z$ alalım; x, y, z pozitiftir.

$$\frac{y+z-x}{x}a^2 + \frac{x+z-y}{y}b^2 + \frac{x+y-z}{z}c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu görmeliyiz. Böylece

$$\left(\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2\right) + \left(\frac{z}{x}a^2 + \frac{x}{z}c^2\right) + \left(\frac{z}{y}b^2 + \frac{y}{z}c^2\right) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S.$$

$\frac{y}{x}a^2 + \frac{x}{y}b^2 \geq 2ab$, ve diğerleri için de yapılırsa,

$$2(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

olduğunu görmek yeterlidir.

$$\begin{aligned} ab+ac+bc &= 2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right) \\ \text{ve} & \\ a^2+b^2+c^2 &= 4S(\cot A+\cot B+\cot C) \end{aligned}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot A+\cot B+\cot C) \geq \sqrt{3}$$

ve

$$\frac{1}{\sin\alpha}-\cot\alpha=\tan\frac{\alpha}{2}$$

olduğundan,

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği okuyucuya bırakacağız.

Problem 5. *Kenarları a_i, b_i, c_i, $i=1,2,\ldots,n$, olan n tane üçgen göz önüne alınız. Yarıçevreleri v_i, çevrel ve içteğet çember yarıçapları R_i ve r_i olmak üzere,*

$$3\left[\prod_{i=1}^{n}a_i^{-\frac{1}{n}}+\prod_{i=1}^{n}b_i^{-\frac{1}{n}}+\prod_{i-1}^{n}c_i^{-\frac{1}{n}}\right]\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{v_i}{R_ir_i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. p_i, $i=1,2,\ldots,n$, çevreleri göstersin. $\dfrac{v_i}{R_ir_i}=\dfrac{p_i^2}{a_ib_ic_i}$ olduğu kullanıldığında eşitsizlik

$$3\left[\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{n}}+\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^{n}c_i^{\frac{1}{n}}+\prod_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^{n}c_i^{\frac{1}{n}}\right] \leq\prod_{i=1}^{n}p_i^{\frac{2}{n}}$$

halini alır. p_i'leri sabit tutalım. Böylece sağ taraf sabit kalacaktır. Sol taraf

$$3\left[\prod_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{n}}+\prod_{i=1}^{n}c_i^{\frac{1}{n}}\right)+\prod_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^{n}c_i^{\frac{1}{n}}\right]$$

şeklinde yazılabilir.

$$\prod_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^{n}c_i^{\frac{1}{n}}=\prod_{i=1}^{n}(b_ic_i)^{\frac{1}{n}}$$

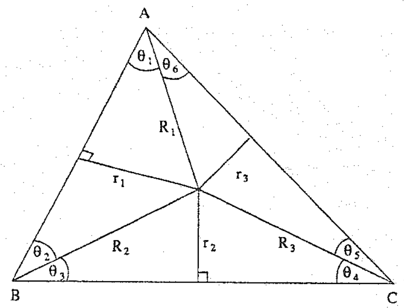
ifadesi $b_i=c_i$ olduğunda maksimumdur. Öte yandan

$$\prod_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{n}}+\prod_{i=1}^{n}c_i^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b_i+c_i)=\text{Sabit}.$$

Eşitlik yine $b_i=c_i$ iken vardır. a_i, b_i ve c_i simetrik olduğundan sol taraf $a_i=b_i=c_i$ olduğunda maksimum olur. Bu durum eşitlik halidir.

Problem 6. *Bir üçgenin içinde alınan bir noktanın köşelere uzaklıkları R_1, R_2, R_3, kenarlara uzaklıkları ise $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ olsun. $R_1R_2R_3\geq 8\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. Şekilden $R_1/R_2=\sin\theta_2/\sin\theta_1$ görülüyor. Diğerleri de yazılıp çarpılırsa $k=\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_5=\sin\theta_2\sin\theta_4\sin\theta_6$ yazılabilir.



Öte yandan

$$\begin{aligned} \sin\theta_1\sin\theta_6 &\leq \sin^2\frac{A}{2} \\ \sin\theta_2\sin\theta_3 &\leq \sin^2\frac{B}{2} \\ \sin\theta_4\sin\theta_5 &\leq \sin^2\frac{C}{2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri gösterilebilir. Bunlar çarpılıp,

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{\Gamma}{4R}\leq\frac{1}{8}$$

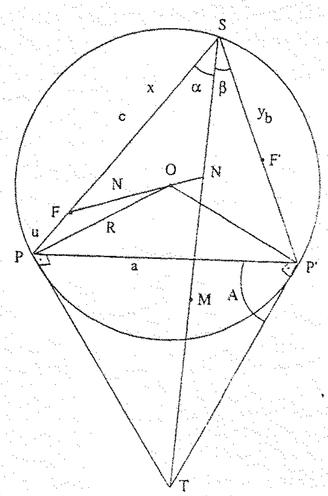
olduğu kullanılarak, $k^2\leq\frac{1}{64}$, $k\leq\frac{1}{8}$ ve

$$k=\frac{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{R_1R_2R_3}$$

olduğundan istenen elde edilir.

Problem 7. *F ve F' bir çemberin içinde merkeze göre simetrik iki nokta olsun. S ise çember üzerinde, fakat FF' doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olsun. SF' ve SF doğruları çemberi P' ve P'de kessin. P ve P' deki teğetler T'de kesişsin. FF' doğru parçasının orta dikmesinin ST'nin orta noktasından geçtiğini gösteriniz.*

Çözüm. Şekilde $SF = x$, $FP = uv$, $SF' = y$, $F'P' = v$, ayrıca $x + u = c$, $y + v = b$, $PP' = a$, açılar için $\alpha + \beta = A$, $\sphericalangle SPP' = B$, $\sphericalangle SP'P = C$ alınmıştır. M, ST'nin ortasıdır. İsteneni göstermek için $FM = F'M$ olduğunu göstereceğiz.



$$\begin{aligned}\overline{FM}^2 &= x^2 + \overline{MS}^2 - 2x\overline{MS}\cos\alpha,\\ \overline{F'M}^2 &= y^2 + \overline{MS}^2 - 2y\overline{MS}\cos\beta;\end{aligned}$$

şu halde aşağıda

$$x^2 - y^2 = 2x\overline{MS}\cos\alpha - 2y\overline{MS}\cos\beta$$

olduğunu görmeliyiz.

Çemberde kuvvetten $x(c - x) = y(b - y)$ olduğundan $cx - by = x^2 - y^2$ olur. Böylece istenen

$$\begin{aligned}cx - by &= 2x\overline{MS}\cos\alpha - 2y\overline{MS}\cos\beta,\\ \frac{x}{y} &= \frac{2\overline{MS}\cos\beta - b}{2\overline{MS}\cos\alpha - c},\\ \frac{x}{y} &= \frac{v}{u}\end{aligned}$$

dur. Ayrıca $\frac{v}{u} = \frac{\cos B}{\cos C}$ olduğu kolayca görülebilir. Şu halde istenen

$$\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{2\overline{MS}\cos\beta - b}{2\overline{MS}\cos\alpha - c}.$$

Öte yandan,

$$2\overline{MS}\cos\beta = \frac{ST^2 + b^2 - \frac{a^2}{4\cos^2 A}}{2b}$$

ve $2\overline{MS}\cos\alpha$'da benzer şekilde yazılırsa istenen

$$\frac{\overline{ST}^2 - b^2 - \frac{a^2}{4\cos^2 A}}{\overline{ST}^2 - c^2 - \frac{a^2}{4\cos^2 A}}\frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

olur. Son olarak,

$$\begin{aligned}\overline{ST}^2 &= b^2 + \frac{a^2}{4\cos^2 A} + ab\frac{\cos B}{\cos A}\\ &= c^2 + \frac{a^2}{4\cos^2 A} + ac\frac{\cos C}{\cos A}\end{aligned}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\frac{\frac{ab\cos B}{\cos A}}{\frac{ac\cos C}{\cos A}}\frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

elde edilir. Dolayısıyla $FM^2 = F'M^2$ ve $FM = F'M$'dir.

Not. *Bu problem Hüseyin Demir ve Cem Tezer tarafından American Mathematical Monthly'de 1991 yılında Problem E3422 olarak yayımlandı. Problemin aslında F' ve F'nin çemberin içinde olması gerekmiyor. F' ve F çemberin dışındayken de benzer bir ispat yapılabileceğini umuyorum. Fakat şu an bunu başaramadığım için probleme içinde olma koşulunu ekledim. F' ve F dışarıdayken çizim farklı olduğundan herşeyi yeniden düzenlemek gerekiyor.*