SAYILAR DÜNYASINDA GEZİNTİLER

H. Turgay Kaptanoğlu *

Bu yazıda derin teorilere inmeden sayıların (çoğunlukla da tamsayıların) ilginç özelliklerinden bahsedeceğiz. Bu özelliklerin hiçbiri yeni değil; yüzyıllar, hatta binyıllar önce bulunmuşlar. Ama hepsinde, büyük matematikçilerin de ilgisini çekmiş estetik taraflar var. Keyfini çıkarın!

A. Yetkin Sayılar

Yetkin sayı diye kendisi dışındaki 1 dahil bütün bölenlerinin (yani *öz*bölenlerinin) toplamına eşit olan pozitif tamsayıya diyoruz. En küçük yetkin sayı 6'dır, çünkü 6'nın özbölenleri 1, 2, 3'tür ve $1+2+3=6$. Çoğu tamsayı yetkin değildir; özbölenleri toplamı ya sayının kendisinden büyüktür ya da küçük. 24'ün özbölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12'dir ve $1+2+3+4+6+8+12=36>24$; 15'in özbölenleri 1, 3, 5'tir ve $1+3+5=9<15$. İlk dört yetkin sayı şunlardır:

$$\begin{aligned} Y_1 &= 6 = 2^1(2^2-1) \\ Y_2 &= 28 = 2^2(2^3-1) \\ Y_3 &= 496 = 2^4(2^5-1) \\ Y_4 &= 8128 = 2^6(2^7-1). \end{aligned}$$

Bu kısa listeyi gördükten sonra genellemeler yapmaya çalışalım; ne de olsa matematikteki pek çok teori bilinen bazı basit örneklerden ortaya çıkmıştır. Meselâ, her yetkin sayı bir öncekinden bir basamak fazladır veya yetkin sayıların birler basamakları sırayla 6 ve 8 olur diye tahmin edebiliriz. Ama bu tahminler hiçbir matematiksel düşünceye dayanmıyor ve daha öteye gidemiyor, çünkü

$$\begin{aligned} Y_5 &= 33550336 = 2^{12}(2^{13}-1) \\ Y_6 &= 8589869056 = 2^{16}(2^{17}-1). \end{aligned}$$

Dikkat ettiyseniz her yetkin sayıyı

$$2^{a-1}(2^a-1)$$

şeklinde yazmaya özen gösterdik; üstelik a her defasında bir *asal sayıydı*, yani 1'den ve kendisinden başka böleni olmayan bir pozitif tamsayı. İlk altı yetkin sayı $a=2,3,5,7,13,17$ değerleri ile elde edildi, bir asal sayı olan 11 atlanarak. Bu hiç de tesadüf değil.

Şu gerçek M.Ö. 3. yüzyılda Öklit tarafından biliniyordu: Eğer 2^a-1 bir asal sayıysa, o zaman $S=2^{a-1}(2^a-1)$ yetkin bir sayıdır. Bunu ispatlamak için S'nin bütün bölenlerini yazalım. Tabii ki $1,2,2^2,\ldots,2^{a-1}$ bölenlerden bir kısmı; bunların toplamına T_1 diyelim. Parantez içindeki ifade asal, ama onu az önceki bölenlerle çarparsak S'nin yeni bölenlerini elde ederiz (1 ve 2^a-1 dahil); bunların toplamına da T_2 diyelim. Bundan başka da böleni yoktur S'nin. Şimdi hepsini toplayalım:

$$\begin{aligned} T_2+T_1 &= (1+2+2^2+\cdots+2^{a-1})(2^a-1) \\ &\quad +(1+2+2^2+\cdots+2^{a-1}) \\ &= T_1(2^a-1)+T_1 = 2^aT_1. \end{aligned}$$

T_1 toplamını ise sonlu geometrik serinin toplamı formülünden elde ederiz; serimizde ilk terim 1, son terim 2^{a-1} ve ortak çarpan 2:

$$T_1 = \frac{2^{a-1}2-1}{2-1} = 2^a-1.$$

O halde

$$T_1+T_2 = 2^a(2^a-1) = 2[2^{a-1}(2^a-1)] = 2S.$$

Neden S yerine $2S$ elde ettik? S'nin bölenleri arasında kendisini de saydık da ondan; bu fazlalığı çıkarırsak özbölenler toplamı olarak S elde ederiz ve bu da S'nin bir yetkin sayı olduğunu gösterir.

İspatımızda, 2^a-1'in asal olması önemli yer tuttu. Şimdi bilmemiz gereken 2^a-1 şeklindeki hangi sayıların asal sayı olduğu. Bu tip sayılara Mersenne sayıları deniyor. 2^a-1'in asal olması için a'nın da asal olması gerekiyor, yani a asal değilse 2^a-1 de asal değil. Bunu

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

görmek çok kolay. Eğer a asal değilse $a = bc$ yazabiliriz. O zaman $2^a - 1 = (2^b)^c - 1$,

$$(2^b - 1)[(2^b)^{c-1} + (2^b)^{c-2} + \cdots + (2^b)^1 + 1]$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Bu önermenin karşıtı ise doğru değil, yani a asal olduğu zaman $2^a - 1$ de asal olacak diye bir kural yok. Yukarıda ilk birkaç yetkin sayıyı yazarken atladığımız $a = 11$ iken $2^a - 1$ asal değil, çünkü $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Dolayısıyla $2^{10}(2^{11} - 1)$'in de yetkin olması gerekmiyor, değil de zaten.

18. yüzyılda Alman matematikçi Euler, Öklit'in bildiği sonucun tersinin de doğru olduğunu gösterdi; yani bir çift sayının yetkin olabilmesi için gerek ve yeter şartın, $2^a - 1$ asal iken sayının

$$Ç = 2^{a-1}(2^a - 1)$$

şeklinde yazılabilmesi olduğunu ispatladı. İspatında, her pozitif tamsayının asal sayıların çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabildiğini ve bütün bölenlerinin toplamını veren formülü kullandı; bu uzun ispatı burada vermiyoruz. Çift yetkin sayıları bulmak için artık iş hangi Mersenne sayılarının asal olduğunu bulmaya kalıyor. Bu da hiç kolay değil; hiç bir kural keşfedilemedi şimdiye dek. Fransız matematikçi Mersenne 17. yüzyılda ilk birkaç tanesini buldu; ondan sonra bulunanlar da bir avuçtan fazla değil. Yeni bir tane bulmak için haftalar tutan bilgisayar hesapları gerekiyor, çünkü binlerce basamaklı sayılar ve bölenleri söz konusu. Yetkin olan tek sayı var mı, yok mu; bu da bilinmiyor.

Çift yetkin sayılar hakkında bilinen bir şey ise birler basamaklarının (sırayla gitmese de) 6 veya 8 olduğu. Bunun da doğruluğunu göstermek zor değil. 2^{a-1} bir 2 kuvveti olduğu için birler basamağı hep 2, 4, 8, 6'dan biri olacaktır. Buna karşılık gelen $2^a - 1$'in birler basamağı ise sırasıyla 3, 7, 5, 1 olacaktır. Birinci, ikinci ve dördüncü hallerde çarpımın birler basamağı sırasıyla 6, 8, 6 olur. Üçüncü hal ise a ancak 4'ün katı iken mümkündür; bunlar ise asal değildir ve çift yetkin sayı vermezler.

Çift yetkin sayıların bir başka özelliği de şu: $Y_2, \ldots, Y_6$'nın basamaklarını toplarsak ve bu işleme tek basamaklı bir sayı kalıncaya kadar devam edersek hep 1 kaldığını görürüz. Bu bir rastlantı mı? Hayır, hiç de değil; cevabı da modüler aritmetikte yatıyor. 6'yı bir kenara ayırırsak, diğer çift yetkin sayılar, a bir tek asal sayı olmak üzere, $Ç = 2^{a-1}(2^a - 1)$ şeklindedir. O zaman $a - 1$ çift sayı olur. $2 \equiv -1 \pmod 3$ denkliğinden $2^{a-1} \equiv (-1)^{a-1} = 1 \pmod 3$ elde ederiz [3]. Bu bize, t diye bir tamsayı için, $2^{a-1} = 3t + 1$ olduğunu söyler. Her iki tarafı 2 ile çarparak $2^a = 6t + 2$ ve $2^a - 1 = 6t + 1$ buluruz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 2^{a-1}(2^a - 1) &= (3t+1)(6t+1) \\ &= 18t^2 + 9t + 1 \\ &\equiv 1 \pmod 9 \end{aligned}$$

olur, çünkü $18t^2$ ve $9t$, 9 ile bölünür. Yani her çift yetkin sayı 9'a bölündüğünde kalan 1 olmaktadır. Bu ise 9'a bölünebilme kuralından [3] basamaklar toplamının 1 olmasına denktir. 6'yı bu hesabın dışında tuttuk, çünkü onu veren $a = 2$ çift ve o zaman $a - 1$ çift olamıyor.

Son olarak, 6 dışındaki her çift yetkin sayının bir küpler toplamı olarak yazılabileceğini söyleyelim. Eğer sayımız $2^{a-1}(2^a - 1)$ ise, ilk $2^{\frac{a-1}{2}}$ tek sayının küplerinin toplamına eşittir. Örneğin, $a = 7$, 8128'i verir. İlk $2^{\frac{7-1}{2}} = 8$ tek sayının küplerinin toplamı da $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3 = 8128$. Nedenini görebiliyor musunuz?

B. Pascal Üçgeni

Önce n negatif olmayan bir tamsayı iken

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

açılımına bakalım. $\binom{n}{k}$'ye *binom katsayısı* ya da *n'nin k'li kombinasyonu* denir. Bu sayı bize n tane 'şey'den k tanesinin (sıra gözetmeksizin) kaç türlü seçilebileceğini ya da n elemanlı bir kümenin k elemanlı kaç tane altkümesi olduğunu söyler; bu yüzden de tamsayıdır. $0 \leq k \leq n$ ve tamsayı ise bunları

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

şeklinde hesaplarız; k negatifse veya n'den büyükse ifadeye 0 değerini veririz. Burada $0! = 1$ ve $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ diye tanımlanır ve *n faktöriyel* diye okunur. (Sıra gözetilerek yapılan seçimler *permütasyon* adını alır ve $n!/k!$ şeklinde hesaplanır; tabii daha az sayıdadırlar.) Hesaplama yönteminde k ile $(n-k)$'nin yerlerini değiştirmek $\binom{n}{k}$'yi değiştirmediği için,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

doğrudur. Yani, 7 elemanlı bir kümeden 2 elemanı seçmenin 5 elemanı seçme kadar yolu vardır; bu da şaşılacak bir gerçek değildir, çünkü 2 eleman seçildiğinde diğer 5 eleman da seçilmiş olur.

Pascal formülü de denilen

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

eşitliği ispat etmek faktöriyelleri yazarak oldukça kolay olsa da, biz gene de anlamını açıklayacak bir ispat vermeye çalışalım. n elemanlı bir K kümemiz olsun ve elemanlarından birine x diyelim. K'nin k'li kombinasyonları x'i içerip içermediklerine göre A ve B gibi iki tiptir. A tipi kombinasyonlar aslında $n-1$ elemanlı $K \setminus \{x\}$ kümesinden $k-1$ eleman seçilip onlara x'i eklemekle oluşturulur ve dolayısıyla bu tipten $\binom{n-1}{k-1}$ tane kombinasyon vardır. B tipi kombinasyonlar ise $K \setminus \{x\}$ kümesinden k tane eleman seçilerek oluşturulurlar ve dolayısıyla bu tipten $\binom{n}{k-1}$ tane kombinasyon vardır. İki tipten kombinasyonları toplayarak sonuca ulaşırız [1]. Bu formülü ve $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ başlangıç değerlerini kullanarak, artık faktöriyele gerek kalmadan binom katsayılarını indirgemeli olarak hesaplayabiliriz.

Binom açılımının elde edilmesi ve kolayca hesaplanmasına olanak verdiği bazı toplamlar [4]'de gösterilmişti. Biz burada sadece bazılarının anlamlarından bahsedeceğiz. Binom açılılmında $x = y = 1$ alınarak elde edilen

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

eşitliği bize n elemanlı bir kümenin tam 2^n tane altkümesi (0 elemanlı boşküme ve kümenin kendisi dahil) olduğunu söyler. $x = 1$ ve $y = -1$ alınarak elde edilen

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

eşitliğini

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots$$

şeklinde yazarsak, bir önceki eşitlikten her iki tarafın $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ olduğunu görürüz ve bu da bize n elemanlı bir kümenin tek sayıda eleman içeren altkümeleriyle çift sayıda eleman içeren altkümelerinin eşit sayıda ve 2^{n-1} tane olduğunu söyler. Bir diğer özellik

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

eşitliğidir. Sağ taraf $2n$ elemanlı bir K kümesinin n elemanlı altkümelerinin (n'li kombinasyonlarının) sayısıdır. Şimdi bunları tekrar değişik biçimde sayalım. K'yi n elemanlı A ve B diye iki kümeye parçalayalım. K'nin her n'li kombinasyonu, bir k için A'nın bir k'li kombinasyonu ile B'nin bir $n-k$'li kombinasyonunun bileşimidir. Bunlar sırayla $\binom{n}{k}$ ve $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ tanedirler. Dolayısıyla, K'nin bu cinsten n'li kombinasyonları $\binom{n}{k}^2$ şekilde seçilebilmektedir. K'nin bütün n'li kombinasyonlarının sayısı ise bu ifadeyi $k = 0$'dan n'ye kadar toplayarak bulunur. Binom açılımında $y = 1$ koyarak elde ettiğimiz ifadenin x'e göre türevini alıp $x = 1$ koyarsak

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

veya $y = 1$ koyma, türev alma, x ile çarpma,

$n=0$	1									
$n=1$	1	1								
$n=2$	1	2	1							
$n=3$	1	3	3	1						
$n=4$	1	4	6	4	1					
$n=5$	1	5	10	10	5	1				
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1			
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1		
$n=8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$n=9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
$\vdots$	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

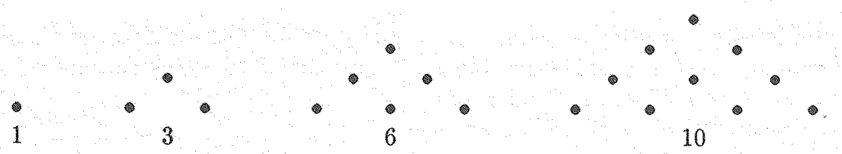
Şekil 1

türev alma, $x = 1$ koyma işlemlerini yaparsak

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

türünden eşitlikler elde ederiz. Bunların türev kullanmayan ispatlarını ve daha yüksek kuvvetler içeren benzerlerini bulmayı okuyucuya bırakıyoruz [1].

Binom katsayılarının Şekil 1'deki gibi dizilişine *Pascal üçgeni* diyoruz. Bu üçgen ilk olarak Fransız matematikçi Pascal'dan dört yüzyıl önce 13. yüzyılda Çinli matematikçi Yang Hui tarafından keşfedilmiştir [2]. Üçgenin n'yinci satırındaki k'yinci sayı $\binom{n}{k}$'dir ($k = 0, \ldots, n$). $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğundan, üçgendeki sayılar en tepeden aşağı inen bir eksene göre simetriktir. Yukarıda elde edilen toplamlardan, n'yinci satırdaki sayıların toplamı 2^n, karelerinin toplamı ise $\binom{2n}{n}$'dir. Pascal formülü, üçgenin çerçevesindeki 1'ler dışında kalan tüm sayıların hemen kuzeydoğu ve kuzeybatısındaki sayıların toplamından elde edilebileceğini söyler. İkinci ve sonraki satırlardaki $\binom{n}{2}$ diye yazılabilecek üçüncü sayıya *üçgensel sayı* denir, çünkü bu sayılar kadar nokta, Şekil 2'de görüldüğü gibi, her kenarında eşit sayıda nokta bulunan birer üçgen halinde dizilebilir. $\binom{n}{2}$ üçgensel sayısı ilk $n-1$ tamsayının toplamına eşittir.



Şekil 2

Dikkat edilirse, Pascal üçgeninde n'yinci satırdaki sayılar 1'den başlayarak artmakta, sonra tekrar 1'e kadar inmekte. n tekse ortadaki iki sayı eşit olmakta, n çiftse ortada tek bir en büyük sayı olmakta. Bunların nedenini görmek için $1 \leq k \leq n$ iken

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}}{\frac{(n)(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)(k-2)\cdots 1}} = \frac{n-k+1}{k}$$

kesirinin pay ve paydasının birbirlerinden büyük veya küçük ya da birbirlerine eşit oldukları durumlara bakmamız gerekir. $k < n - k + 1$ ile $k < \frac{n+1}{2}$ eşdeğerdir. Eğer n çiftse, $k < \frac{n+1}{2}$ ile $k \leq \frac{n}{2}$ eşdeğer, n tekse $k < \frac{n+1}{2}$ ile $k \leq \frac{n-1}{2}$ eşdeğerdir. Bu ise üçgendeki satırın sol yarısındaki k'ler için kesirin 1'den büyük olduğunu ve dolayısıyla sayıların artarak gittiğini gösterir. Azalmayı göstermek için ise $<$ işaretleri $>$'e çevrilir. Pay ve paydanın eşitliği $k = n - k + 1 = 1$ demektir ve bu da $2k = n + 1$'e denktir. Buradan da satırdaki iki ardışık sayının eşit olabilmesi için n'nin tek ve k'nin $\frac{n+1}{2}$ olması gerektiği ortaya çıkar.

Şimdi $k \leq n$ olacak şekilde Pascal üçgeninin k'yinci satırının en son sayısından başlayıp güneybatı yönüne doğru yolumuza çıkan sayıları toplayarak $k + m$'yinci satıra dek ilerleyelim. Örneğin, $k = 2$ ve $k + m = 7$ ise $1+3+6+10+15+21 = 56$ toplamına bakalım. Bu toplamın, $k + m + 1$'inci satırda son eklediğimiz sayının hemen güneydoğusundaki sayı olduğunu görürüz. k'yinci satırın ilk sayısından başlayıp $k + m$'yinci satıra dek güneydoğu yönüne ilerlersek benzer bir toplama erişiriz. Bu iki toplam binom katsayıları cinsinden şöyle yazılabilir:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+m}{k} = \binom{k+m+1}{k+1}$$

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \cdots + \binom{k+m}{m} = \binom{k+m+1}{m}$$

Pascal üçgeninin simetrikliğinden dolayı bu iki ifadeden birinin doğruluğu diğerininkini de gerektirir. İlk ifade daha genel haliyle [4]'de vardır. İkinci ifade bulmanın bir yolu da sağ tarafına k kere Pascal formülü uygulamaktır. İlk ifadenin genel halinin bir başka özel hali ise

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \cdots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

eşitliğidir. $k = 1$ hali bize bilinen

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

formülünü, yani üçgensel sayıları, verir.

Pascal üçgeninin beşinci sırasındaki 1'ler dışındaki bütün sayılar 5'e bölünebildiği halde altıncı sırasındakilerin hepsi 6 ile bölünmezler. Bunun nedeninin 5'in asal sayı olması biraz şaşırtıcı gelebilir, ama

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

ifadesine baktığımızda n asal sayı ise paydadaki n'yi götüren hiç bir şey olamaz paydada, ve n sayısı $\binom{n}{k}$'nin bir çarpanı olarak kalır. Tersinden, n asal değilse, n'nin çarpanı olan en küçük asal sayıya k diyelim. Eğer $\binom{n}{k}$ sayısı n ile bölünebilseydi,

$$\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

bir tamsayı olurdu. Bu imkânsızdır, çünkü paydadaki sayıların hiçbiri k'nin en küçük olma özelliğinden dolayı k'ye bölünemez. Yani n'nin asallığı gerek ve yeter şarttır. 19. yüzyılda Fransız matematikçi Lucas, asal sayılar, modüler aritmetik ve binom katsayıları arasında aşağıdaki bağıntıları elde etti [**2**]. Bunların ispatını okuyuculara bırakıyoruz. a bir asal sayı olsun.

(i) Her pozitif tamsayı n için, $\binom{n}{a} \equiv \lfloor \frac{n}{a} \rfloor \pmod{a}$. $\lfloor b \rfloor$, b'den küçük veya b'ye eşit en küçük tamsayıyı gösterir.

(ii) $1 \le k \le a-1$ ise $\binom{a}{k} \equiv 0 \pmod{a}$.

(iii) $2 \le k \le a-1$ ise $\binom{a+1}{k} \equiv 0 \pmod{a}$.

(iv) $0 \le k \le a-1$ ise $\binom{a-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{a}$.

(v) $0 \le k \le a-2$ ise $\binom{a-2}{k} \equiv (-1)^k(k+1) \pmod{a}$.

(vi) $0 \le k \le a-3$ ise $\binom{a-3}{k} \equiv (-1)^k\binom{k+2}{2} \pmod{a}$.

Son olarak $(x+y)^r$ ifadesinde r tamsayı değil de herhangi bir gerçel sayıysa ne olacağına bakalım. Her şeyden önce r bir gerçel sayıysa $\binom{r}{k}$ ifadesi r üzerinde faktöriyeller kullanmadan

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin, $\binom{\frac{7}{2}}{5}$ şu demektir:

$$\binom{\frac{7}{2}}{5} = \frac{(\frac{7}{2})(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{5!} = -\frac{7}{256}$$

Şimdi k'nin r'den büyük olmasını engelleyen hiçbir şey olmadığından, k negatif olmayan herhangi bir tamsayı olabilir, ve hatta az sonra göreceğimiz gibi bu gereklidir de. Tabii 'kümelerin k elemanlı altkümelerinin sayısı' gibi anlamlar vermek artık mümkün değildir. Newton 17. yüzyılda $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ için

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

olduğunu gösterdi. Bunun ispatı birtakım derin yakınsaklık kavramları gerektiriyor ve buraya almıyoruz. Buradan $z = \frac{x}{y}$ ve $r = -n$ alarak ve biraz sadeleştirerek

$$\frac{1}{(z+1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

gibi eşitlikler çıkartabiliriz. $n = 1$ koyarak ve z'yi $-z$ ile değiştirerek elde edeceğimiz

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots$$

eşitliği bize ilk terimi 1 ve ortak çarpanı z ($|z| < 1$) olan sonsuz geometrik serinin toplamı formülünü verir. Newton'ın formülünde $r = \frac{1}{2}$ yazarsak $\binom{r}{0} = 0$ olur ve epeyi bir sadeleştirmeden sonra toplamımız, $|z| < 1$ için,

$$\sqrt{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} z^k$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ilk birkaç terimin toplamına bakarak sayıların karekökünü yaklaşık hesaplayabiliriz. Aslında hesap makineleri de benzer bir yöntemle çalışır. Meselâ,

$$\begin{aligned}\sqrt{20} &= \sqrt{16+4} = \sqrt{16(1+0.25)} = 4\sqrt{1+0.25} \\ &= 4\left[1 + \frac{1}{2}(0.25) - \frac{1}{8}(0.25)^2 + \frac{1}{16}(0.25)^3 - \cdots\right] \\ &= 4.472\cdots.\end{aligned}$$

KAYNAKÇA

[1] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Elsevier North-Holland, New York, 1977.

[2] C. C. Chen & K. M. Koh, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific, Singapur, 1992.

[3] A. Nesin, *Üçe, Dokuza ve Onbire Bölünebilme*, *Matematik Dünyası*, **3**, sayı 4, 5–7 (1993).

[4] H. Oral, *Nasıl Toplamalı?*, *Matematik Dünyası*, **3**, sayı 3, 26–28 (1993).