CEBİRSEL DENKLEMLERİN KÖKLERİ

Nurettin Çalışkan *

Birinci derece $ax+b=0$ $(a \neq 0)$ denkleminin bir tane kökü olduğunu ve bu kökün de $x=-\frac{b}{a}$ olduğunu bilmeyen bir kimse yoktur. İkinci derece $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ denkleminin ise iki kökü olduğunu ve bu köklerin de

$$x_{1,2}=\frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

olarak verildiğini en azından bu dergiyi okuyan herkesin bildiğini düşünebiliriz.

Birinci derece denklemlerin ilk ne zaman çözüldüğü tarihin derinliklerinde kaybolmuş. Eski Mısırda M.Ö. 3500, Mezopotamya'da ise M.Ö. 2000 yıllarında en azından pozitif köklerin hesaplanabildiği biliniyor. Aynı uygarlıklar bazı özel hallerde ikinci derece denklemleri de çözebiliyorlar. Metot olarak ise kareye tamamlama kullanılıyor her ne kadar "şunu yap, bunu yap" gibi yemek tarifi şeklinde anlatılsa da. Zaten yukarıda kökleri veren formül de kareye tamamlama ile elde edilir. Eski Yunanlılar bu bilgilere sadece çözümün geometrik yorumunu ekliyorlar.

M.S. 600 yıllarından başlayarak Hintlilerin sıfırı keşfetmeleri ve negatif sayıları kullanmaya başlamaları ile bu uygarlık ve daha sonraki Arap uygarlığı bütün birinci ve ikinci derece denklemleri çözebiliyor ve hatta bazı özel hallerde üçüncü derece denklemlere bile el atıyor. Burada Muhammed ibn Musa el Hârizmî'den (780?–850?) bahsetmemiz gerekiyor. 830'da yazdığı *El Cebr vel Mukabele* adlı kitabıyla bugün de kullandığımız "cebir" ve "kök" kelimelerini, adının Latinceleştirilmesiyle de "algoritma" kelimesini matematiğe kazandırıyor. Bu kitap bütün Ortaçağ boyunca matematiği etkileyecektir. Artık irrasyonel sayılar da kök olarak kabul ediliyor, ama hâlâ kök sanal sayı olarak çıkarsa yokmuş gibi davranılıyor. Sanal sayıların anlaşılması ise ancak ücüncü ve dördüncü derece denklemlerin köklerini veren formüller bulunduktan sonra 17. yüzyıldan başlayarak mümküm olabiliyor.

Üçüncü derece denklemlere gelince işin rengi biraz değişiyor. Bazı basit üçüncü derece denklemlerin köklerini hemen yazabiliriz. Örneğin $x^3-27=0$ denkleminin üç kökü de 3'tür. $(x-1)(x+1)^2=0$ denkleminin bir kökü 1, diğer iki kökü ise $-i$ ve $+i$'dir. $x^3+6x+2=0$ denkleminin kökleri ise hemen yazılabilecek türde değildir. (Yazıda verilen yöntem kullanılarak denklemin köklerinin $x_1=2^{1/3}-4^{1/3}$ ve $x_{2,3}=[4^{1/3}-2^{1/3} \pm i\sqrt{3}(2^{1/3}+4^{1/3})]/2$ olduğu görülebilir.) Herhangi bir ikinci derece denklem için kökleri derhal veren kolay formül varken, üçüncü derece bir denklemin köklerini yazabileceğimiz formüller çoğumuzun hafızasında bulundurulmayacak kadar karmaşıktır. Bu yazımızda, trigonometrik fonksiyonlar yardımı ile $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a \neq 0)$ üçüncü derece denkleminin köklerinin elde edilmesini vereceğiz. Dördüncü dereceden denklemler için ise, beklenilenin aksine, kökleri veren formüller üçüncü derecedekinden daha insaflıdır; yazımızda bu formüllere de yer vereceğiz.

Üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin genel çözümünün bulunması için Rönesans'ın gelmesi bekleniyor. İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano (1501–1576) 1545'te yayımladığı *Ars Magna* adlı eserinde bazı çağdaşlarının yaptıklarından yararlanarak üçüncü dereceden denklemlerin "Kardan çözümü"nü veriyor. Bu kitapta Cardano'nun öğrencisi Lodovico Ferrari'nin (1522–1565) bulduğu dördüncü dereceden denklemlerin çözümü de var. Sanal sayılar hâlâ bilinmiyor, ama gene de bu eserde karekök altında negatif sayılarla doğru işlemler yapılıyor.

Daha sonra Fransız matematikçi François Vieta (1540–1603) 1591'de üçüncü dereceden denklemlerin trigonometrik metotla çözümlerini buluyor. Ayrıca ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümlerini ortak bir yönteme oturtuyor. Vieta, denklemlerdeki katsayılarda her defasında değişik sayılar yerine a, b gibi harfler kullanarak matematiğin soyutlaşarak genelleşmesine de katkıda bulunuyor.

* ODTÜ Matematik Bölümü araştırma görevlisi

Bundan sonra ilk akla gelen, beşinci dereceden her hangi bir denklemin köklerini veren formül olacaktır. Ne yazık ki elimizde böyle bir formül yok. Şanslı olduğumuz nokta şu ki böyle bir formül aramaya da ihtiyacımız yok, çünkü beşinci (ve daha yüksek) dereceden denklemlerin köklerini verecek bir formül bulunamayacağı ispatlanmış. Bu ispat için soyut cebirin 2.5 yüzyıl kadar daha gelişmesini beklemek gerekmiş. Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel (1802–1829) 1826'da bu ispatı tam olarak vermiş. Neden böyle bir formül bulunamayacağını ise bu derginin gelecek sayılarında bulacaksınız.

$ax^2+bx+c=0$ ikinci derece denklemi verildiğinde, her iki tarafı a ile bölerek $x^2+px+q=0$ denklemine indirgeriz. Bu denklemin çözümlerini üç ayrı durumda vereceğiz.

(I) $q>0$ ve $\left|-\frac{2\sqrt{q}}{p}\right|<1$ ise $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{q}}{p}$ deriz; kökler $x_1=\sqrt{q}\tan\frac{\theta}{2}$ ve $x_2=\sqrt{q}\cot\frac{\theta}{2}$ olur.

(II) $q>0$ ve $\left|-\frac{2\sqrt{q}}{p}\right|>1$ ise $\cos\theta=\frac{p}{2\sqrt{q}}$ deriz; kökler $x_1=-\frac{p}{2}+2i\sqrt{q}\sin\theta$ ve $x_2=-\frac{p}{2}-2i\sqrt{q}\sin\theta$ olur.

(III) $q<0$ ise $\tan\theta=\frac{2\sqrt{-q}}{p}$ deriz; kökler $x_1=\sqrt{-q}\tan\frac{\theta}{2}$ ve $x_2=-\sqrt{-q}\cot\frac{\theta}{2}$ olur.

Yukarıda karekök altında negatif sayı varsa, bu o sayının mutlak değerinin karekökünün i ile çarpımı olarak algılanmalıdır. Bilindiği gibi i, -1'in pozitif karekökü olan sanal sayıdır.

Örnek 1. $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$ ikinci dereceden denklemin çözümlerine bakalım. $b=\frac{3}{4}$ ve $a=-2$ olarak verildiğinden, (I) halinin formüllerini kullanarak çözümü bulabiliriz.

$$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

eşitliği kullanılarak $\theta=\frac{\pi}{3}$ bulunur. Bulduğumuz θ değerini diğer eşitliklerde yerine koyduğumuzda

$$x_1=\sqrt{b}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2},$$

$$x_2=\sqrt{b}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\left(\frac{\pi}{\theta}\right)=\frac{1}{2}$$

denklemin kökleridir.

Üçüncü Dereceden Cebirsel Denklemlerin Trigonometrik Çözümü

Genel şekliyle verilen üçüncü dereceden

$$AX^3+BX^2+CX+D=0 \qquad (A\neq 0)$$

denkleminde, katsayıları A ile böldükten sonra $X=x-\frac{B}{3A}$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$p=\frac{3AC-B^2}{3A^2}, \qquad q=\frac{27A^2D+2B^3-9ABC}{27A^3}$$

olmak üzere

$$(1) \qquad x^3+px+q=0$$

şeklinde, x^2'li terimi eksik üçüncü dereceden denklem elde edilir. Bu son denklemin kökleri x_1,x_2,x_3 olarak bilinirse $X_i=x_i-\frac{B}{3A}$ $(i=1,2,3)$ dönüşümü ile $AX^3+BX^2+CX+D=0$ denkleminin kökleri elde edilir. Bu durumda, en genel hal yerine, $x^3+px+q=0$ tipindeki denklemlerin köklerini bulan formüllerin bilinmesi yeterli olacaktır.

(1) denkleminde $x=y+z$ konulduğunda $y^3+z^3+3yz(y+z)+p(y+z)+q=0$ ya da

$$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi de

$$\begin{aligned} y^3+z^3+q &= 0 \\ (3yz+p)(y+z) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde ikili bir denklem sistemi ile ifade edebiliriz. Sistemin ikinci denklemini incelediğimizde iki çarpımdan birinin sıfıra eşit olması gerektiği görürüz. Sıfırdan farklı çözümler aradığımız için, $y+z\neq 0$ olmalıdır. Bu durumda yukarıdaki denklemlerden

$$\begin{aligned} y^3+z^3 &= -q \\ yz &= -\frac{p}{3} \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. $u_1=y^3$, $u_2=z^3$ alındığında, kökleri u_1 ve u_2 olan

$$(2) \qquad u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0$$

olan ikinci dereceden denklemi elde ederiz. Bu denklem çözülerek, u_1 ve u_2 kökleri bulunduğunda $x=u_1^{1/3}+u_2^{1/3}$ ifadesi (1) denkleminin çözümü olacaktır

(2) denkleminin, p'nin işaretine göre, çözümü üç durumda inceleyeceğiz.

(i) $p > 0$: Bu durumda (III)'teki formüller kullanıldığında

$$\tan\theta = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

ve (2) denkleminin kökleri

$$u_1 = \sqrt{\frac{p^3}{27}}\tan\frac{\theta}{2} \quad \text{ve} \quad u_2 = -\sqrt{\frac{p^3}{27}}\cot\frac{\theta}{2}$$

olacaktır. Buradaki u_1 ve u_2 değerlerini yerine koyarsak

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{1/3} - \left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^{1/3}\right]$$

elde edilir. $(\tan\frac{\theta}{2})^{1/3} = \tan\frac{\varphi}{2}$ değişkeni kullanılarak

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\tan\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}\right] \\ &= \sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\tan^2\frac{\varphi}{2} - 1}{\tan\frac{\varphi}{2}}\right] \\ &= 2\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\frac{\tan^2\frac{\varphi}{2} - 1}{2\tan\frac{\varphi}{2}}\right] = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi \end{aligned}$$

bulunur.

(1) denkleminin bir çözümünü bulduktan sonra indirgeme yöntemini kullanarak diğer iki çözümünü de bulabiliriz. (1) ifadesini $x - x_1$'e böldüğümüzde, bölüm $x^2+x_1x+x_1^2+p$ olacaktır. O halde $x^2+x_1x+x_1^2+p = 0$ denkleminin kökleri bize, (1)'in diğer iki çözümünü verir. Buradan

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-x_1 \mp \sqrt{x_1^2 - 4(x_1^2+p)}}{2} \\ &= \frac{-x_1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{3x_1^2+4p} \\ &= -\frac{x_1}{2} \mp \frac{i}{2}\sqrt{3x_1^2+4p}, \end{aligned}$$

ya da x_1 değeri yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= -\frac{x_1}{2} \mp \frac{1}{2}i\sqrt{4p(1+\cot^2\varphi)} \\ &= -\frac{x_1}{2} \mp i\sqrt{p}\csc\varphi \end{aligned}$$

bulunur.

Özetlersek, $p > 0$ koşulunda (1) denkleminin çözümleri

$$\tan\theta = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}, \qquad \tan\frac{\varphi}{2} = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{1/3}$$

ve

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi \\ x_2 &= -\frac{x_1}{2} + i\sqrt{p}\csc\varphi \\ x_3 &= -\frac{x_1}{2} - i\sqrt{p}\csc\varphi \end{aligned}$$

formüllerinin kullanımı ile hesaplanabilir.

Örnek 2. $x^3 + 4x + \frac{16}{9} = 0$ üçüncü dereceden denkleminin köklerini bulmaya çalışacağız. Denklemde $p = 4$ ve $q = \frac{16}{9}$ olarak verilmiş. Bu değerleri yukarıdaki ilk eşitlikte yerine koyduğumuzda $\tan\theta = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \sqrt{3}$ ve buradan da $\theta = \frac{\pi}{3}$ elde edilir. Bulduğumuz θ değerini ikinci eşitlikte yerine koyduğumuzda $\tan(\frac{\varphi}{2}) = (\tan\frac{\theta}{2})^{1/3} = 3^{1/6}$ olur.

Buradan φ değeri, trigonometrik tablo veya hesap makinesi yardımıyla bulunabilir. İkinci bir yöntem de trigonometrik eşitlikler kullanarak, bize gereken $\cot\varphi$ ve $\csc\varphi$ değerlerinin $\tan(\frac{\varphi}{2})$ cinsinden yazılmasıdır. Böylece $\cot\varphi = \frac{1}{2}(3^{1/6} - 3^{-1/6})$ ve $\csc\varphi = \frac{1}{2}(3^{1/6} + 3^{-1/6})$ bulunur. Böylece denklemin kökleri

$$\begin{aligned} x_1 &= -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi \\ &= -2\sqrt{\frac{4}{3}}\frac{1}{2}(3^{1/6} - 3^{-1/6}) \\ &= 2(3^{-2/3} - 3^{-1/3}) \\ x_2 &= -\frac{x_1}{2} + \sqrt{p}\csc\varphi i \\ &= 3^{-1/3} - 3^{-2/3} + (3^{1/6} + 3^{-1/6})i \\ x_3 &= -\frac{x_1}{2} - \sqrt{p}\csc\varphi i \\ &= 3^{-1/3} - 3^{-2/3} - (3^{1/6} + 3^{-1/6})i \end{aligned}$$

(ii) $p < 0$ ve $-4p^3 < 27q^2$: Bu durumda, (2)'nin çözümlerini, (I)'deki formülleri kullanarak bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \sin\theta &= -\frac{2}{q}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \\ u_1 &= \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\tan\frac{\theta}{2}, \\ u_2 &= \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\cot\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

elde ederiz. $x_1 = u_1^{1/3} + u_2^{1/3}$ eşitliğini kullanarak (1)'in bir çözümü

$$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{1/3} + \left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^{1/3}\right]$$

olur. $(\tan\frac{\theta}{2})^{1/3} = \tan\frac{\varphi}{2}$ değişkeni kullanılarak

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}\right) \\ &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\frac{\tan^2\frac{\varphi}{2}+1}{\tan\frac{\varphi}{2}}\right) = \sqrt{-\frac{p}{3}}\csc\varphi \end{aligned}$$

bulunur. Yeniden indirgeme yöntemi kullanılarak denklemin diğer kökleri hesaplanabilir.

Özetlersek,

$$\sin\theta = -\frac{2}{q}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \qquad \tan\frac{\varphi}{2} = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{1/3}$$

ve

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-\frac{p}{3}}\csc\varphi \\ x_2 &= -\frac{x_1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\csc\varphi \\ x_3 &= -\frac{x_1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\csc\varphi \end{aligned}$$

(1) denkleminin çözümünü verir.

(iii) $p < 0$ ve $-4p^3 > 27q^2$: Bu durumda $\frac{-4p^3}{27p^2} > 1$ olacağından daha önce elde edilen formülleri kullanamayacağız. Onun yerine, daha farklı değişkenler ve trigonometrik eşitlikler kullanarak çözümü bulmaya çalışacağız.

(1) denkleminde $x = ny$ değişkenini yerine koyalım. $n^3y^3 + npy + q = 0$ ya da

$$y^3 + \frac{p}{n^2}y + \frac{q}{n^3} = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemde,

$$\sin^3\phi - \frac{3}{4}\sin\phi + \frac{1}{4}\sin 3\phi = 0$$

trigonometrik özdeşliği hatırlanarak $y = \sin\phi$ alındığında

$$\frac{p}{n^2} = -\frac{3}{4} \qquad \text{ve} \qquad \frac{q}{n^3} = \frac{1}{4}\sin 3\phi$$

olur. Yukardaki ilk eşitlikten $n = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ bulunur. (x ve y'nin aynı işaretli olması için bu ifadelerdeki kök pozitif olarak alınacaktır.) Bulduğumuz n değerini ikinci denklemde yerine koyduğumuzda

$$\sin 3\phi = \sqrt{-\frac{27q^2}{4p^3}}$$

olur. $\sqrt{-\frac{27q^2}{4p^3}} < 1$ olacağından, denklem ϕ için çözülebilir. O halde

$$\begin{aligned} \sin 3\phi &= \frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}} \\ x &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\phi \end{aligned}$$

denklem sistemi, (1) denklemini çözecektir.

Yukarıdaki iki eşitlikten ilkini sağlayan en küçük açıya θ diyelim. k bir tamsayı ise, $2k\pi+\theta$ ve $(2k+1)\pi - \theta$ de sağlar onu. Bulunan ϕ'lerin sinüs değerlerine bakıldığında

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) = \begin{cases} \sin\frac{\theta}{3}, & k = 3m \\ \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}), & k = 3m+1 \\ -\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3}), & k = 3m-1 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{2k+1}{3}\pi + \frac{\theta}{3}\right) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}), & k = 3m \\ \sin\frac{\theta}{3}, & k = 3m+1 \\ -\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}), & k = 3m-1 \end{cases}$$

olduğu görülür. Bu değerler incelendiğinde yanlızca üç farklı değer olduğu görülecektir. Bulunan üç farklı ϕ değerini yukardaki sistemin ikinci denkleminde yerine koyduğumuzda elde edilen formül (1) denkleminin çözümünü verir.

Özetlersek

$$\sin\theta = \frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$$

ve

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\frac{\theta}{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{3}\right) \\ x_3 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\theta}{3}\right) \end{aligned}$$

(1) denkleminin çözümünü verir.

Örnek 3. $x^3 - 6x + 4 = 0$ denklemine bakalım. Denklemde $p = -6$ ve $q = 4$ olarak verilmiştir. p ve q değerlerini ilk denklemde yerine koyduğumuzda $\sin\theta = \frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ve buradan da $\theta = \frac{\pi}{4}$ bulunur. Bu değer diğer üç eşitlikte yerine konularak

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) = -1+\sqrt{3} \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right) = 2 \\ x_3 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{2}\right) = -1-\sqrt{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

Dördüncü Derece Cebirsel Denklemlerin Çözümü

Katsayıları reel olan

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \qquad (A \neq 0)$$

dördüncü dereceden cebirsel denkleminde, katsayılar A ile bölündükten sonra x yerine $x - \frac{B}{4A}$ konulursa,

$$\begin{aligned} p &= \frac{6B^2 - 12AB + 16AC}{16A^2} \\ q &= \frac{2B^3 - 8ABC + 16A^2D}{16A^3} \\ r &= \frac{-3B^4 + 16AB^2C - 64A^2BD + 256A^3C}{256A^4} \end{aligned}$$

olmak üzere, x^3 terimi eksik

(3) $$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

şeklinde dördüncü dereceden denklem elde edilir.

Bütün u değerleri için (3) denklemi

$$x^4 + ux^2 + \frac{u^2}{4} - ux^2 - \frac{u^2}{4} + px^2 + qx + r = 0$$

ya da

(4) $$\left(x^2 + \frac{u}{2}\right)^2 - \left[(u-p)x^2 - qx + \frac{u^2}{4} - r\right] = 0$$

denklemine denktir. Bu denklemde ilk terim bir tam karedir. İkinci terim de bir tam kare olarak ifade edildiğinde, dördüncü dereceden denklemin çözümü, ikinci dereceden iki denklemin çözümüne indirgenmiş olacaktır.

(5) $$(u-p)x^2 - qx + \frac{u^2}{4} - r = 0$$

denklemini x için çözdüğümüzde,

$$\frac{q \mp \sqrt{q^2 - 4(u-p)(\frac{u^2}{4} - r)}}{2(u-p)}$$

denklemin köklerini verir. u değişkenini

(6) $$q^2 - 4(u-p)\left(\frac{u^2}{4} - r\right) = 0$$

denklemini sağlayacak şekilde seçersek, (5) denklemi çift katlı $x = \frac{q}{2(u-p)}$ köküne sahip olacaktır. (6) denkleminin bütün katsayıları reel olduğundan en az bir u_1 reel kökü vardır. Bulunan u_1 değerini (4) denkleminde yerine koyduğumuzda

$$\left(x^2 + \frac{u_1}{2}\right)^2 = (u_1 - p)\left(x - \frac{q}{2(u_1-p)}\right)^2$$

elde edilir. Artık buradan x değerlerini bulmak kolaydır.

Sonuç olarak,

$$q^2 - 4(u-p)\left(\frac{u^2}{4} - r\right) = 0$$

denkleminin reel çözümü $u = u_1$ ise

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{u_1 - p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p - \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}} \\ x_2 &= \frac{\sqrt{u_1 - p}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p - \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}} \\ x_3 &= \frac{-\sqrt{u_1 - p}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p + \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}} \\ x_4 &= \frac{-\sqrt{u_1 - p}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-u_1 - p + \frac{2q}{\sqrt{u_1 - p}}} \end{aligned}$$

formülleri, (3) denkleminin bütün çözümlerini verir.

Örnek 4. $x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0$ denklemini düşünelim.

$$\left(x^2 + \frac{u}{2}\right)^2 - \left[(u-1)x^2 + 4x + \frac{u^2}{4} + 3\right] = 0$$

eşitliğini u için çözdüğümüzde $u = 2$ değerinin denklemin bir çözümü olduğu görülür. Bulduğumuz u değerini ilk denklemde yerine koyduğumuzda, $(x^2+1)^2_? - (x^2 + 4x + 4) = 0$ ya da $(x^2+1)^2 = (x+2)^2$ elde ederiz Buradan da

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ x_3 &= -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{11}) \\ x_4 &= -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{11}) \end{aligned}$$

verilen denklemin kökleridir.

KAYNAKÇA

[1] G. Birkhoff & S. Maclane, *A Survey of Modern Algebra*, McMillan, 1965.

[2] S. D. Fisher, *Complex Variables*, 2. baskı, Wadsworth, 1990.