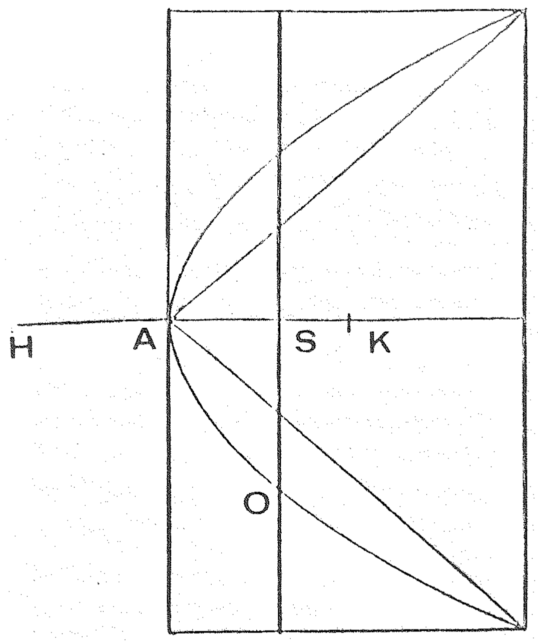

Şekil 3

Arşimet bu noktada silindirin hacminin $8\pi r^3$ olduğunu, koninin hacminin bunun üçte biri olduğunu ve AK'nin de HA'nın yarısı olduğunu göz önüne alarak kürenin hacmini $\frac{4}{3}\pi r^3$ olarak buluyor. Koninin hacminin silindirin hacminin üçte biri olduğunu nereden bulduğunu sorgulayacak okuyucuya karşı Arşimet'in sağlam bir yanıtı var: Öklit (!), *Elemanlar*, **XII**.10.

Bu metodun küre üzerinde sonuç vermesinden cesaret alarak Arşimet elipsoidin ve paraboloidin hacimlerini hesaplama problemine de elindeki kaldıraçla girişiyor. Şekil 2 ve 3'te bu çözümler için kullandığı çizimleri görüyorsunuz. Elipsoidin hacmi probleminde $\frac{AS \cdot SC}{SO^2} = \frac{AK^2}{KB^2}$ bağıntısı, paraboloidin hacmi probleminde de $AS = SO^2$ bağıntısı önemli olacak. Hesapların ayrıntılarını vermiyorum. Bu kadar ipucu ve Arşimet'den yirmi iki yüzyıl sonra yaşıyor olmanın rahatlığıyla nasıl olsa sonucu kendiniz hemen bulabilirsiniz ...

Teşekkür. İçinde Arşimet'in bu çalışmasını bulduğum *Archimedes*, Heath (editör), adlı kitabını bana yıllar önce ödünç veren ve geri istemeyen dostum Prof. Metin Gürses'e gecikmiş teşekkürler.

SONSUZ TÜR SONSUZLUK VARDIR

Nurettin Ergun *

Bazı kümelerin bazı kümelerden daha fazla elemanı vardır. $\{1, 2 \ldots, 50\}$ kümesinde $\{5, 10, 15, \ldots, 50\}$ kümesinden daha fazla eleman vardır. $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin iki elemanlı alt kümeleri, $\{1, 2\}$ kümesinin tüm alt kümelerinden fazladır. İki gerçel sayı arasında, tüm gerçel sayılar eksenindeki rasyonel sayılardan daha fazla irrasyonel sayı vardır. Matematiğin en önemli başarılarından biri, tanımlanabilen tüm kümelerin "eleman sayılarını" kıyaslayabilmek amacıyla, bir tür ölçme sayıları sistemi ve bu sistem içinde şaşırtıcı özelliklere sahip bir aritmetiği tanımlayabilmesi olmuştur. Bu "ölçme sayıları" özel bazı ordinal sayılardır. Bu sayıların ve üzerlerinde tanımlanan aritmetiğin temel özelliklerini tanıtmak bu yazının amacını ve kapsamını aşar (bkz. Notlar 1).

Biz bu yazıda şu ana ve temel ölçütle çalışacağız: Bir A kümesinden bir B kümesine hiç bir üzerine fonksiyon tanımlanamadığı matematiksel olarak kanıtlanabiliyorsa, ancak o zaman B kümesinde A kümesinden daha fazla sayıda eleman vardır denir ve bu olgu kısaca $|A| < |B|$ işareti ile gösterilir. Eğer A ve B arasında üzerine ve bire-bir bir fonksiyon tanımlanabiliyorsa $A \cong B$ ya da $|A| = |B|$ yazılır ve A ile B kümelerine eş kuvvette kümeler denir.

Ana Teorem. *A ve B kümeleri ne olursa olsun $|A| = |B|$, $|A| < |B|$, $|B| < |A|$ bağdaşmaz durumlarından biri ve yalnızca birisi geçerlidir.*

Bu yazının amacı eş kuvvettte olmayan küme örnekleri vermektir. Üzerine (ya da

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

örten) fonksiyon, bire-bir fonksiyon, temel küme işlemleri ve tümevarım kavramını biraz olsun tanıyan, bileşkeleri tanımlanabilen iki üzerine fonkiyonun bileşke fonksiyonunun da üzerine olduğunu bilen ve anlama çabası ile okuyan herkes anlatılanları sanırız kavrayacaktır. Elinizde tuttuğunuz derginin Haziran-Ağustos 1991 sayısında yayımlanan *Kümelerin Niceliği* başlıklı yazının bazı sonuçlarına bakmak yararlı olabilir.

Tüm doğal sayılar kümesi, yani $\{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$, kısaca $\mathbb{N}$ işareti ile, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi ise $\mathbb{N}_n$ işareti ile gösterilecektir. Bir X kümesinin tüm alt kümelerinden oluşan küme ise $\mathcal{P}(X)$ ile gösterilecektir.

Önerme 1. *$\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.*

Bu önermeyi n doğal sayıları üzerinden tümevarımla göstereceğiz. Apaçıktır ki $N_1 = \{1\}$ kümesinden $N_2 = \{1,2\}$ kümesine tanımlanan herhangi bir fonksiyon altında $\mathbb{N}_2$ kümesindeki elemanlardan birisi görüntü elemanı olamaz. Şimdi önermenin n doğal sayısı için doğru olduğunu varsayalım. Buna n'nci adım varsayımı adı verilir. Bu varsayım altında $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+2}$ kümesine herhangi bir üzerine fonksiyonun tanımlanmasının olanaksızlığını, olmayana ergi (ya da saçmaya indirgeme) yöntemiyle gösterelim. Bir $g : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_{n+2}$ üzerine fonksiyonu tanımlı olsaydı, öncelikle her bir $k \in \mathbb{N}_{n+2}$ için $g^{-1}(k) \neq \emptyset$ olurdu. Dikkat: $n+1 \in g^{-1}(n+2)$ olamaz, aksi halde $k \leq n+1$ gerçekleyen her $k \in \mathbb{N}_{n+2}$ için $g^{-1}(n+2) = \emptyset$ ve $g^{-1}(k) \subseteq \mathbb{N}_{n+1} - \{n+1\} = \mathbb{N}_n$ nedeniyle $g \mid \mathbb{N}_n : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_{n+1}$ kısıtlama fonksiyonu üzerine olurdu, bu n'nci adım varsayımına aykırıdır. Demek ki $n+1 \notin g^{-1}(n+2)$, $g(n+1) \leq n+1$ ve $g^{-1}(n+2) \subseteq \mathbb{N}_n$ ara sonuçları ve $\mathbb{N}_n = (\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup g^{-1}(n+2)$ eşitliği elde edilir. Şimdi

$$h(k) = \begin{cases} g(k), & k \in \mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2) \text{ ise}, \\ g(n+1), & k \in g^{-1}(n+2) \text{ ise}, \end{cases}$$

şeklindeki $h : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_{n+1}$ fonksiyonunun üzerine olduğunu göstererek yine bir çelişki elde edelim. Gerçekten $\{g(n+1)\} = \{g(n+1)\} - \{n+2\}$ nedeniyle

$$\begin{aligned} h(\mathbb{N}_n) &= h(\mathbb{N}_n - g^{-1}(n+2)) \cup h(g^{-1}(n+2)) \\ &= g(\mathbb{N} - g^{-2}(n+2)) \cup \{g(n+1)\} \\ &= (g(\mathbb{N}_n) - \{n+2\}) \cup \{g(n+1)\} \\ &= (g(\mathbb{N}_n) \cup \{g(n+1)\}) - \{n+2\} \\ &= g(\mathbb{N}_{n+1} - \{n+2\}) \quad = \quad \mathbb{N}_{n+1} \end{aligned}$$

bulunarak yine n'nci adım varsayımına aykırı düşülmüş olur. Tüme varım varsayımı altında $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+2}$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamıyacağı gösterilmiş oldu.

Önerme 2. *$n < m$ ise $\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_m$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.*

Dikkat edilirse $n \leq m$ ise, $\mathbb{N}_m$ kümesinden $\mathbb{N}_n$ kümesine pek çok (en az $n \cdot n!$ tane) üzerine fonksiyon tanımlanabilir. O halde $n < m$ iken $\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_m$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanabilseydi, $\mathbb{N}_n$ kümesinden $\mathbb{N}_{n+1}$ kümesine üzerine bir (bileşke) fonksiyonu tanımlanabilirdi. Bu olanaksızdır.

Önerme 3. *X kümesi ne olursa olsun, X kümesinden $\mathcal{P}(X)$ kümesine üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz.*

Georg Cantor'a ait bu olağanüstü önemli önermenin Bertrand Russell tarafından verilen şu kısa çarpıcı kanıtlamasına bakınız. Eğer bir $h : X \to \mathcal{P}(X)$ üzerine fonksiyonu tanımlanabilseydi $X_0 = \{x \in X : x \notin h(x)\}$ "iyi tanımlanmış" alt kümesi için, bu küme boş olsun ya da olmasın, en az bir $x_0 \in X$ elemanının $h(x_0) = x_0$ gerçeklemesi gerekirdi. Dikkat: $x_0 \in X_0$ ancak ve yalnız $x_0 \notin X_0$ iken geçerlidir. Ne çelişki! Bu önemli önermenin Cantor tarafından verilen bir başka kanıtlamasını da görmenin yararlı olduğunu sanıyoruz. Varsayalım ki bir $h : X \to \mathcal{P}(X)$ üzerine fonksiyonu tanımlanabilsin. O halde her bir $x \in X$ için $A_x = h(x) \subseteq X$ "görüntü elemanı" tanımlı olurdu. Her bir $A \subseteq X$ alt kümesinin karakteristik fonksiyonu, $\forall x \in A$ için $\chi_A(x) = 1$ ve $\forall x \in X - A$ için $\chi_A(x) = 0$ şeklinde, X kümesinden $\{0,1\}$ kümesine tanımlanan fonksiyondur. Dikkat edilirse ancak ve yalnız $A = B$ iken χ_A ve χ_B karakteristik fonksiyonları eşit olabilir; başka bir deyişle kümesindeki her bir elemanda eşit değerler alabilirler. Gerçekten $A = B$ ise her $x \in A (= B)$ için $\chi_A(x) = 1 = \chi_B(x)$ ve her $x \in X - A (= X - B)$ için $\chi_A(x) = 0 = \chi_B(x)$ olur. Tersine eğer her $x \in X$ için $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ ise, özellikle her bir $a \in A$ için $1 = \chi_A(a) = \chi_B(a)$ eşitliği bize $a \in B$ gerçeklendiğini söyler ve sonuçta $A \subseteq B$ ve benzer biçimde $B \subseteq A$ kapsamaları ve dolayısı ile $A = B$ eşitliği elde edilir. Şimdi okuyucu, $\forall x \in X$ için $\varphi(x) = \chi_{X-A_x}(x)$ şeklinde X kümesinden $\{0,1\}$ kümesine tanımlanan φ

fonksiyonunun, $\varphi^{-1}(1) = E \subseteq X$ olmak üzere, E kümesine ait olsun olmasın, her bir $x \in X$ elemanı için $\varphi(x) = \chi_E(x)$ sağladığını kolayca görecektir. $E = h(x_0) = A_{x_0}$ sağlayan en az bir $x \in X$ elemanı var olduğundan (neden?), sonuçta $\varphi = \chi_E = \chi_{A_{x_0}}$ ve dolayısı ile $\chi_{A_{x_0}}(x_0) = \varphi(x_0) = \chi_{X-A_{x_0}}(x_0)$ saçma sonucu elde edilirdi; burada sol yan 1 iken sağ yan 0 dır ya da tersi. Demek ki X kümesinden $\mathcal{P}(X)$ kümesine tanımlanmış bir üzerine fonksiyonun varlığından söz edilemez.

Önerme 4. *$\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine herhangi bir üzerine fonksiyon tanımlanamaz.*

$\mathbb{R}$ kümesinden $\mathcal{P}(N)$ kümesine üzerine ve üstelik bire-bir bir fonksiyon tanımlıdır (bkz. Önerme 5). O halde $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine üzerine bir fonksiyonunun tanımlanabilmesi varsayımı bir önceki önermeyle çelişen bir sonuç doğurur. Neden? Biz burada başka bir kanıtlama verelim. $]0,1[$ aralığındaki gerçel sayılar doğal sayılarla numaralandırılamazlar ve dolayısı ile $\mathbb{N}$ kümesinden $]0,1[$ aralığına üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz (bkz. Notlar 2). Gerçekten bu aralıktaki tüm gerçel sayılar kümesi $\mathbb{N}$ kümesi ile "numaralandırılabilseydi," bu aralık $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ kümesinden başka bir şey olmazdı. Dikkat: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ rasyonel sayıları nedeniyle bu aralıkta zaten "en az" doğal sayılardaki kadar gerçel sayı vardır. Her bir n doğal sayısı için x_n gerçel sayısı $x_n = 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}x_{n4}\cdots$ şeklindeki ondalık açılıma sahiptir; burada $x_{n1}, x_{n2}, \ldots$ basamakları $0, 1, \ldots, 9$ tam sayılarıdır (bkz. Notlar 3). Bilindiği gibi en az bir basamak 0 değildir ve belirli bir basamaktan sonra tüm diğerleri 9 olamaz. Tersine basamakları bu koşula uyan herhangi bir ondalık açılım $]0,1[$ aralığına ait bir gerçel sayıdır. Şimdi, her n için x_n gerçel sayısının n'nci basamağı olan x_{nn} tam sayısı yardımı ile önce $k_n = [\frac{x_{nn}+1}{3}]$ tam sayısını ve sonra $x_n = x_{nn} + (-1)^{k_n}$ tam sayılarını basamak kabul eden $a = 0, a_1a_2a_3\cdots$ gerçel sayısını tanımlayalım. Bu gerçel sayı bir yandan $]0,1[$ aralığına aittir, öte yandan bu aralıktaki tüm x_n gerçel sayılarından farklıdır, çünkü $a_n \neq x_{nn}$ geçerli olmaktadır. Çelişki! Demek ki $\mathbb{N}$ kümesinden $]0,1[$ aralığına, üzerine bir fonksiyon tanımlanamaz. Oysa $g(x) = \frac{x}{2+2|x|} + \frac{1}{2}$ şeklindeki $g : \mathbb{R} \to]0,1[$ fonksiyonu üzerine (ve üstelik bire-bir) olduğundan (neden?), $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine bir üzerine fonksiyonun tanımlanamıyacağı anlaşılır.

Uyarı. Yukarıda $|\mathbb{N}_1| < \cdots < |\mathbb{N}_n| < \cdots < |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ gerçeklendiği gösterildi. Önerme 2 nedeni ile bir küme eğer $\mathbb{N}_n$ kümesi ile eş kuvvette ise, $n \neq m$ olmak üzere $\mathbb{N}_m$ kümesi ile eş kuvvette olamaz. Ancak ve yalnız $\mathbb{N}_n$ kümesi ile eş kuvvette olabilen bir kümeye n *elemanlı* denir. $\mathbb{N}_n$ kümelerinin hiç birisi ile eş kuvvette olamayan bir X kümesinin ya $|X| = |\mathbb{N}|$, ya da $|\mathbb{N}| < |X|$ gerçekleyeceği Ana Teorem'in bir sonucudur. Böyle bir kümeye *sonsuz elemanlı küme* denir. Her X kümesi için $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ gerçeklendiğini bildiğimiz için, her sonsuz noktalı kümeden çok daha kalabalık bir başka sonsuz elemanlı kümenin var olduğu anlaşılır. Aynı nedenden ötürü "en kalabalık sonsuz elemanlı küme" yi tanımlamak olanaksızdır. Bu yazıyı, pek çok önemli kümenin eş kuvvette olduklarını gösterebilmemize elveren olağanüstü önemli bir teoreme ilişkin iki ünlü uygulama ile bitiriyoruz.

Önerme 5. *$\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$'dir.*

Önce şu temel gerçeği gözleyelim. Herhangi iki gerçel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı vardır. Gerçekten $x < y$ ise $\frac{1}{y-x} < n$ gerçekleyen n doğal sayısının varlığı gerçel sayıların temel özelliklerinden biridir. $r = \frac{[nx]+1}{n}$ rasyonel sayısı $x < r < y$ gerçekler, çünkü $nx < [nx] + 1 \leq nx + 1 < ny$ geçerlidir. O halde $x < r_1 < r < p_1 < y$ gerçekleyen r_1 ve p_1 rasyonel sayıları ve dolayısı ile $x < \cdots < r_3 < r_2 < r_1 < r < p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < y$ gerçekleyen rasyonel sayılar da vardır. Şimdi, $\varphi(x) =]-\infty, x] \cap Q$ şeklinde tanımlanan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(Q)$ fonksiyonu bire-birdir; örneğin $x < y$ ise, yukarıda varlığı kanıtlanan r rasyonel sayısı $r \in \varphi(y) - \varphi(x)$ gerçekler. Demek ki $x \neq y$ ise, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ gerçeklenmektedir. O halde $\mathcal{P}(Q) \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$ olduğundan (neden?), $\mathbb{R}$ kümesinden $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır. Şimdi herbir $A \in \mathcal{P}(x)$ için

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_A(n) + 1}{10^n}$$

şeklinde tanımlanan $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to]0,1[$ fonksiyonu göz önüne alınsın. O halde $\psi(A)$, ondalık açılımında, n'nci basamağı $k_n^A = \chi_A(n) + 1$ tamsayısı olan gerçel sayıdır, yani $\varphi(A) = 0, k_1^A k_2^A k_3^A \cdots$'dır. Dolayısı ile φ bire-birdir, neden? Demek ki $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine tanımlı bir bire-bir fonksiyon vardır, neden? Aşağıdaki teorem önermeyi kanıtlar.

Cantor-Bernstein Teoremi. *X kümesinden Y kümesine bir bire-bir fonksiyon ve tersine Y kümesinden X kümesine bir bire-bir fonksiyon tanımlı ise $X \cong Y$ olur.*

Önerme 6. $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ *'dir.*

Burada $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ ile $\mathbb{N}$ kümesinin n elemanlı tüm alt kümelerinin kümesi, $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ ile de $\mathbb{N}$ kümesinin tüm sonlu elemanlı alt kümelerinin kümesi, yani $\mathcal{P}_0(\mathbb{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ gösterilmektedir. $n \leftrightarrow \{n\}$ eşlemesi nedeniyle hemen $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_1(\mathbb{N})$ bulunur. Şimdi $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ varsayalım. Bu n'nci adım varsayımımızdır. Dikkat edilirse $X \cong Y$ ise, bu eş kuvvetteliği gerçekleştiren üzerine ve bire-bir fonksiyon f olmak üzere $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leftrightarrow \{f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)\}$ eşlemesi sayesinde $\mathcal{P}_n(X) \cong \mathcal{P}_n(Y)$ olduğu apaçıktır. Ayrıca her m doğal sayısı için $m \leftrightarrow m+1$ eşlemesi yardımıyla $\mathbb{N} \cong \{2, 3, \ldots\}$ ve sonuçta $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) \cong \mathcal{P}_n(\mathbb{N} - \{1\})$ gerçeklenir. O halde 1'den farklı doğal sayılardan oluşan $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ kümesine $\{1, m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ kümesini eşleştiren fonksiyon ve n'nci adım varsayımı yardımı ile $\mathbb{N}$ kümesinden $\mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ kümesine bire-bir bir fonksiyon tanımlanabilir. Şimdi de şunları gözleyelim. $(x, y, z) \leftrightarrow ((x, y), z)$ ile $X \times Y \times Z \cong (X \times Y) \times Z$ ve sonuçta herhangi bir X kümesi için $X^3 \cong X^2 \times X$ ve tümevarımla kolayca $X^n \cong X^{n-1} \times X$ geçerli olduğu anlaşılır. O halde her $2 \leq n$ doğal sayısı için yine tümevarımla $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ elde etmek güç değildir. Sonuçta, $n+1$ elemanlı herhangi bir doğal sayılar kümesi için $h(\{m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}) = (m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun bire-bir olduğu apaçık görüldüğünden, $\mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bire-bir bir fonksiyonun tanımlanabildiği de anlaşılır. O halde Cantor-Bernstein teoremi nedeniyle $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{N})$ sonucu elde edilir. Böylelikle ilk iddia tümevarımla gösterilmiş olur. $\mathbb{N} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$ iddiasını göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz (bkz. Notlar 4).

Notlar

1. Ordinal sayılar sisteminin yeterince mükemmel olmasına karşın, çok önemli bazı soruların yanıtları açıklığa kavuşturulamamaktadır. Örneğin $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin eleman sayısını "ölçmekte" kullanılan ordinal sayıyı belirlemek olanaksızdır. Cantor 1878 yılında ω_1 işareti ile gösterilen ordinal sayının bu nitelikte olduğunu öngörmüştü. 1938 ve 1963 yıllarında kanıtlanan iki teoremden ötürü bu öngörünün doğruluğunun ya da yanlışlığının kanıtlanamıyacağı anlaşıldı. Dahası, sonsuz elemanlı herhangi bir X kümesi için $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesinin eleman sayısını "ölçmekte" kullanılan ordinal sayı, böyle bir sayının varlığının kesinkes kanıtlanabilmesine karşın, açıkca belirlenememektedir.

2. $\mathbb{N}$ kümesinden sonsuz noktalı herhangi bir X kümesine tanımlanan herhangi bir f üzerine fonksiyonu için şunlara dikkat edelim: Her bir $x \in X$ elemanı için $\mathbb{N}_x = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\} \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi boş değildir ve üstelik $x \neq y$ için $\mathbb{N}_x$ ile $\mathbb{N}_y$ kümeleri ayrıkdır ve dolayısı ile $\mathbb{N}_x$ ile $\mathbb{N}_y$ farklı kümelerdir. O halde $x \leftrightarrow \mathbb{N}_x$ eşlemesi bire-birdir. Her bir $\mathbb{N}_x$ kümesinden bir ve yalnız bir n_x doğal sayısı seçilsin. $x \leftrightarrow \mathbb{N}_x$ eşlemesi de bire-birdir, yani $\{n_x : x \in X\} \cong X$ ve üstelik $f(\{n_x : x \in X\}) = X$ gerçeklenir, neden? $\{n_x : x \in X\}$ sonsuz elemanlı olduğu için $\mathbb{N}$ ile eş kuvvettedir, neden? O halde X kümesinin tüm elemanları $\mathbb{N}$ ile "numaralanabilir", yani $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ yazılabilir. Okuyucu, benzer düşünceleri herhangi bir üzerine fonksiyon için yapmalıdır.

3. Gerçel sayıların ondalık açılımları (ya da 10 tabanlı açılımları) konusunda bu derginin Nisan 1991 sayısında yer alan *Gerçel Sayı Nedir?* başlıklı yazıya başvurulabilir.

4. Her bir n için $\mathcal{P}_n(\mathbb{N}) = \{A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \ldots\}$ yazılarak $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine

$$h(A_{nm}) = n + \frac{1}{2}(n+m-2)(n+m-1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun üzerine ve bire-bir olduğunu göstermeğe çalışın. Ayrıntılar için *Kümelerin Niceliği* başlıklı yazıdaki Önerme 5'e bakılmalıdır.