

$$(A4.2) A77. \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{p=1}^{n-1} p^{n-k} = n^n - n$$

($n \geq 2$) olduğunu gösteriniz. (Dinçer Akay)

$$\text{Çözüm. } A = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \sum_{p=1}^{n-1} p^{n-k} =$$

$\sum_{p=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^{n-k}$ olsun. Binom formülünden

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{n-k} = (1+p)^n$ olduğunu biliyoruz. O

halde $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} p^{n-k} = (1+p)^n - p^n - 1$ ve

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p=1}^{n-1} \{(1+p)^n - p^n - 1\} \\ &= (2^n - 1^n - 1) + (3^n - 2^n - 1) \\ &\quad + \dots + \{n^n - (n-1)^n - 1\} \end{aligned}$$

olur. Birbirini götüren terimleri ayıkladığımızda

$$A = n^n - 1^n - (n-1) = n^n - n$$

kahır.

(Çözenler: Emre Alkan, Atasâğun Baykal, Burhan Biner, Almas Rimov)

(A4.3) A78. Bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin orta noktaları X, Y , ve $[AB] \cap [CD] = F$ ise, $\text{alan}(FXY) = \frac{1}{4} \text{alan}(ABCD)$ olduğunu gösteriniz. (Ayhan Aziz)

Çözüm. F noktası, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının uzantılarının kesiştiği noktadır. Bu da ancak $ABCD$ dörtgeni, paralelkenar olmayan genel bir dörtgen olarak alındığında gerçekleşir. Kolaylık olsun diye $\text{alan}(FXY)$ yerine $|FXY|$ kullanacağız. $[BC]$ ve $[AD]$ 'nin orta noktalarına Q ve S diyelim. $|FXY| = |FXQ| + |FYQ| + |QXY|$ diye parçalarız. B ve F aynı doğru üzerinde olduklarından $|FXQ| = |BXQ| = \frac{1}{4}|CAB|$ ve aynı şekilde $|FYQ| = |CYQ| = \frac{1}{4}|BCD|$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} |QXY| &= \frac{1}{2}|XQYS| \\ &= \frac{1}{2}(|ABCD| - |DYS| \\ &\quad - |ASX| - |ABQX| - |CDYQ|) \\ &= \frac{1}{2}(|ABCD| - \frac{1}{4}|DAB| \\ &\quad - \frac{1}{4}|ACD| - \frac{3}{4}|ABC| - \frac{3}{4}|BCD|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8}(4|ABCD| - |DAB| \\ &\quad - |ACD| - 3|ABC| - 3|BCD|) \\ &= \frac{1}{8}(4|ABCD| - |ABCD| \\ &\quad - |ABCD| - 2|ABC| - 2|BCD|) \\ &= \frac{1}{4}(|ABCD| - |ABC| - |BCD|) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$|FXY| = |FXQ| + |FYQ| + |QXY| = \frac{1}{4}|ABCD|.$$

(Çözenler: Alaattin Aktaş, Şevket Emrah Aydın, Atasâğun Baykal, Burhan Biner, Almas Rimov, Ergün Yaraneri)

(A4.4) A79. Bir üçgende içaçıların kotanjantları aritmetik dizi oluştururlarsa, kenar uzunluklarının karelerinin de aritmetik dizi oluşturduklarını gösteriniz. (Hasan Kullap)

Çözüm. $2 \cot B = \cot A + \cot C$ olması halinde $2B^2 = A^2 + C^2$ olacağını gösterelim.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{ve} \quad \sin A = \frac{a}{2R}$$

den,

$$\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$$

ve benzer olarak

$$\cot B = \frac{R(a^2 + c^2 - b^2)}{abc}$$

$$\cot C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}$$

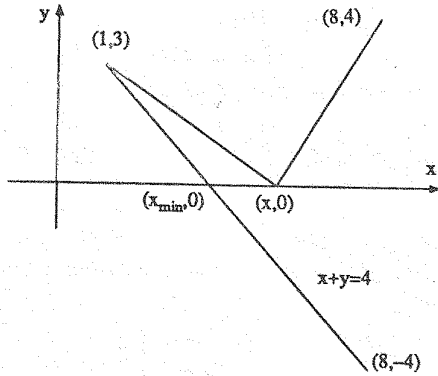
yazılır. $2 \cot B = \cot A + \cot C$ ise $2(a^2 + c^2 - b^2) = (b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + b^2 - c^2)$ ve $2b^2 = a^2 + c^2$ bulunur.

(Çözenler: Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Şevket Emrah Aydın, Atasâğun Baykal, Burhan Biner, Ercan Şahin, Ruhi Tabur, Almas Rimov, Ergün Yaraneri)

(A4.5) A80. $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16}$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz. (Moskova Bağımsız Üniversitesi, 1991 Giriş Sınavı)

Çözüm. Kartezyen düzlemde bakarsak $f(x)$, $(x, 0)$ noktasının $(1, 3)$ ve $(8, 4)$ noktalarına

uzaklıklarının toplamıdır. Şekilden görüldüğü



gibi bu toplamı minimum yapan $(x_{\min}, 0)$ değeri $(1, 3)$ ile $(8, 4)$ 'ün simetriği olan $(8, -4)$ noktasını birleştiren doğru ile x ekseninin kesim noktası olacaktır. $(8, -4)$ ile $(1, 3)$ noktalarından geçen doğru,

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{8-3}{-4-1},$$

yani $y-3 = -(x-1)$, yani $y+x=4$ doğrusudur. O halde $x_{\min} = 4$ ve $f(x)$ 'in minimum değeri $\sqrt{(4-1)^2+9} + \sqrt{(4-8)^2+16} = \sqrt{9+9} + \sqrt{16+16} = 7\sqrt{2}$ 'dir.

(Çözenler: Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Murat Aygen, Şevket Emrah Aydın, Atasağın Baykal, Almas Rimov, Özgün Sümer, Ercan Şahin, Ruhi Tabur)

(Y4.1) Y76. $[AA']$ ve $[BB']$, O merkezli birim çemberin birbirine dik iki çapıdır. B' noktasından geçen değişken bir doğru, $[OA]$ 'yı U 'da ve AB yayını P 'de keserse, OUP üçgeninin alanının alabileceği en büyük değer $\frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. OA ve OB 'yi eksen kabul eden dikdörtgen koordinat sistemi kabul edersek, U 'nun koordinatları $(u, 0)$ ve $B'U$ doğrusunun denklemi de $\frac{1}{u} - y = 1$ olur. P noktasının koordinatları için, bu denklemin çemberin $x^2 + y^2 = 1$ denklemiyle ortak çözümünden

$$u = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{ve} \quad y = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

temin edilir. $|OUP| = S$ yazalım. Koordinatlar cinsinden

$$2S = uy = \frac{u-u^3}{1+u^2} = u \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

ve

$$2 \frac{dS}{du} = \frac{1-4u^2-u^4}{(1+u^2)^2}$$

bulunur. $\frac{dS}{du} = 0$ 'dan $u^4 + 4u^2 - 1 = 0$ ve $u = \sqrt{\sqrt{5}-2}$ bulunur. Problemin özelliğinden bu kritik noktanın bir maksimuma tekabül ettiği açıktır. O halde S 'nin en büyük değeri

$$\begin{aligned} S &= \frac{u(3-u^3)}{2\sqrt{5}-1} = \frac{u(-2+2\sqrt{5})}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} \sqrt{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4} \sqrt{10\sqrt{5}-22} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(Çözenler: Tamer Adanır, Alaattin Aktaş, Emre Alkan, Şevket Emrah Aydın, Murat Aygen, Atasağın Baykal, Buhan Biner, Almas Rimov, Özgün Sümer, Ercan Şahin, Ruhi Tabur)

(Y4.2) Y77. Elemanları 0 veya 1 olan, her satırında ve her sütununda en az bir 0 ve en az bir 1 bulunan kaç tane farklı $n \times n$ ($n \geq 2$) matris bulunabilir?

Çözüm. Elemanları 0 veya 1 olabilen n elemanlı bir 'sıra'da en az bir 0 ve en az bir 1 olacak ise, bu sıra $2^n - 2$ farklı şekilde teşkil edilebilir. Bu tarz sıralardan n tanesini alt alta dizersek $(2^n - 2)^n$ farklı şekilde, her satırda en az bir 1 ve en az bir 0 olan $n \times n$ matrisler yazabiliriz. k tane sütununun her biri tamamen 0 ve ya 1 lerden oluşan matrislerin sayısı da $2(2^{n-k} - 1)^n + (2^k - 2)2^{n(n-k)}$ olduğundan, içerme-dışarma prensibini kullanarak istenen matrislerin sayısını

$$(2^n - 2)^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} [2(2^{n-k} - 1)^n + (2^k - 2)2^{n(n-k)}]$$

olarak buluruz.

(Y4.3) Y78. Dış r_a, r_b, r_c yarıçapları verilen bir üçgenin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. Bir I_a noktası alınıp, I_a merkez ve r_a yarıçaplı (I_a) çemberi üzerindeki bir E noktasından teğet doğru çizilir. $r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = u^2$ yazılarak, çizilen teğet doğru üzerinde E 'den uzaklığı u olan bir A noktası işaretlenir ve A 'dan (I_a)'ya $[AF]$ teğet doğru parçası çizilir. $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$ eşitliğinden r iç yarıçapı bulunup, I merkezi $[AI_a]$ üzerinde olmak üzere AE ve AF 'ye teğet r yarıçaplı (I) çemberi çizilir. Bu iki çemberin kesişmesi halinde çözüm yoktur. Çemberler kesişmiyorsa ortak bir iç teğet doğrusu

çizilir. Bu doğrunun AE ve AF doğrularını kestiği noktalara B ve C denirse, ABC üçgeni aradığımız üçgen olur.

(Çözenler: Emre Alkan, Atasağun Baykal, Almas Rimov)

(Y4.4) Y79. Köşegenlerinin kesişme noktası K olan bir $ABCD$ dörtgeninde, CAB , DAB ve KAB üçgenlerinin iç teğet çemberleri AB 'ye sırasıyla T_1 , T_2 ve T noktalarında değsinler. r_1 ve r_2 , KBC ve KDA üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları ise,

$$r_1 \leq r_2 \iff |TT_1| \leq |TT_2|$$

olduğunu gösteriniz. (Hüseyin Demir)

Çözüm. $\sphericalangle BKC = 2\alpha$, $|KA| = x$, $|KC| = x'$, $|KB| = y$, $|KD| = y'$ diyelim.

$$r_1 = \frac{y + x' - b}{2} \tan \alpha, \quad r_2 = \frac{x + y' - d}{2} \tan \alpha$$

olup, $r_1 < r_2 \iff y + x' - b \leq x + y' - d$ bulunur. Öte yandan

$$|BT_1| = a + b - (x + x'), \quad |BT_2| = \frac{a + y + y' - d}{2}$$

ve

$$|BT| = \frac{a + y - x}{2}$$

olup, $TT_1 = |BT| - |BT_1| = y + x' - b$ ve $TT_2 = |BT_2| - |BT| = x + y' - d$ elde edilir. Buradan da $TT_1 \leq TT_2 \iff y + x' - b \leq x + y' - d$ bulunur.

(Çözenler: Ali Akın, Alaattin Aktaş, Atasağun Baykal, Almas Rimov)

(Y4.5.) Y80.

$$\begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & d_n \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm. $1 \leq k \leq n$ için

$$D_k = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_k \end{vmatrix}$$

determinantı olsun. $D_1 = d_1$ ve $D_2 = d_1 d_2 - 1$ olur. D_{k+1} için bir indirgeme bağıntısı bulalım.

Önce

$$f(x) = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Determinant açılımından $f(x) = D_k x + C$ şeklindedir. Öte yandan $x = 1$ için $f(1) = D_k + C$ ve determinant kurallarından

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{vmatrix} d_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & d_k & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} d_1 - 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 - 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_k - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (d_1 - 1)(d_2 - 1) \cdots (d_k - 1) \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$C = -D_k + (d_1 - 1)(d_2 - 1) \cdots (d_k - 1)$$

ve

$$\begin{aligned} D_{k+1} &= f(d_{k+1}) \\ &= D_k(d_{k+1} - 1) \\ &\quad + (d_1 - 1)(d_2 - 1) \cdots (d_k - 1) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} D_1 &= d_1 \\ D_2 &= d_1(d_2 - 1) + (d_1 - 1) \\ &= (d_1 - 1)(d_2 - 1) + (d_1 - 1) + (d_2 - 1) \\ D_3 &= (d_1 - 1)(d_2 - 1)(d_3 - 1) + (d_1 - 1)(d_3 - 1) \\ &\quad + (d_2 - 1)(d_3 - 1) + (d_1 - 1)(d_2 - 1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

den de

$$D_n = \left[\prod_{i=1}^n (d_i - 1) \right] \left[1 + \frac{1}{d_1 - 1} + \frac{1}{d_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{d_{n-1} - 1} \right]$$

bulunur. Bu kolayca tümevarımla ispatlanabilir.

(Çözenler: Tamer Adanır, Alaattin Aktaş, Almas Rimov)