35. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI TAKIM SEÇME SINAVI

Birinci Gün, 30 Nisan 1994
Süre: 4.5 saat

1. Tamsayılar üzerinde tanımlı olan bir f fonksiyonu tüm x tamsayıları için

$$f(x) + f(x+3) = x^2$$

eşitliğini sağlamaktadır. $f(19) = 94$ olduğuna göre $f(94)$ değerini hesaplayınız.

2. O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberin bu çapı üzerinde O ile B arasındaki bir E noktasından $[AB]$ çapına çıkılan dikme, çemberi D noktasında kesiyor. $[DE]$ ve $[EB]$ doğru parçalarına sıra ile K ve C noktalarında teğet olan bir çember BD yayına da F noktasında içten teğettir. Buna göre $\widehat{EDC} = \widehat{BDC}$ olduğunu ispatlayınız.

3. Bir 25-genin bütün kenarları ve köşegenleri kırmızı ve beyaza boyanırsa, köşeleri 25-genin köşelerinde bulunup bütün kenarları aynı renk olan en az 500 üçgen bulunacağını gösteriniz.

İkinci Gün, 1 Mayıs 1994
Süre: 4.5 saat

4. ABC üçgeninin kenarları üzerinde $P \in [AB]$, $Q \in [BC]$, $R \in [CA]$ ve

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|BQ|}{|BC|} = \frac{|CR|}{|CA|} = k \qquad \left(k < \frac{1}{2}\right)$$

olacak biçimde P, Q, R noktaları alınıyor. G, ABC üçgenirin ağırlık merkezi olduğuna göre

$$\frac{\text{Alan}(PQG)}{\text{Alan}(PQR)}$$

değerini bulunuz.

5. $\lim_{i\to\infty} \frac{2^{n_i}}{3^{m_i}} = 1$ olacak şekilde n_i, m_i $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ pozitif tamsayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

6. $a^2 + b^2 + 3$ sayısının $a \cdot b$ ile bölünebilmesini sağlayan tüm (a, b) tamsayı ikililerini bulunuz.

İki basamaklı ab ve cd gibi iki sayıyı alt alta yazıp çarparken önce ab'nin d ile çarpımı yazılır, sonra da, 'bir kaydırarak,' ab'nin c ile çarpımı yazılır ve bu çarpımlar yazıldıkları hizada toplanır. Burada kullanılan özellik şudur: cd sayısını $10c+d$ şeklinde yazarsak, $ab \times cd$ çarpımının $(10c + d) \times ab = 10c \times ab + d \times ab$ olduğunu görürüz. Buradaki '$10c \times ab$' terimi, ab'nin c ile çarpımının 'bir kaydırarak' yazılacağını söylemektedir.

Dergimizi ziyaret eden Sincan Anadolu Lisesi *orta birinci sınıf öğrencisi Türker Özsarı*, bu gözlemi iki basamaklı üç sayının çarpımında kullanarak iki seferde yapılabilecek $ab \times cd \times ef$ çarpımını bir çırpıda hesaplayabiliyor. Çarpımı $(10c + d) \times (10e + f) \times (ab) = (100e \cdot c + 10c \cdot f + 10d \cdot e + d \cdot f) \times (ab) = 100e \cdot c \cdot (ab) + 10e \cdot d \cdot (ab) + 10c \cdot f \cdot (ab) + d \cdot f \cdot (ab)$ olarak yazarak Türker Özsarı'nın gözlemine geçebiliriz: Önce $d \cdot f \cdot (ab)$ çarpımı yazılır, bir kaydırdıktan sonra $c \cdot f \cdot (ab)$ çarpımı ve $e \cdot d \cdot (ab)$ çarpımları ve bir daha kaydırarak $e \cdot c \cdot (ab)$ çarpımı yazılır ve bu çarpımlar yazıldıkları hizada toplanarak sonuç bulunur. Örnek olarak $27 \times 18 \times 43$ çarpımını hesaplayalım:

```
           ab               27
           cd               18
           ef               43
     ---------------  ----------
      d·f·(ab)             648   (24·27)
      c·f·(ab)             81    ( 3·27)
      e·d·(ab)             864   (32·27)
      e·c·(ab)            108    ( 4·27)
     ---------------  ----------
     T O P L A M         20898
```