PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Geçen sayıdaki problemlerin numaraları **A76–A80** ve **Y76–Y80** olarak alınmıştır. Bundan böyle bu numaralama sistemi devam ettirilecektir.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A81. Birbirine eş olan dört çemberden üçünün her biri, verilen bir ABC üçgeninin içinde olup açılardan birinin iki kenarına teğettir. Dördüncü çember bu üç çembere teğet ise bu çemberlerin cetvel ve pergelle çizilebileceğini gösteriniz.

A82. Tabanı $[BC]$ ve A açısı geniş olan bir ABC üçgeninin A köşesi ve yan kenarlarının birer kısmı çizim kağıdının dışına taşmıştır. Bu üçgenin $[AD]$ kenarortayını, $[AE]$ iç açıortayını ve $[AF]$ yüksekliğini belirleyiniz.

A83. O kesişme noktası çizim kağıdının dışına düşen a ve b doğruları ve bunların dışında bir C noktası veriliyor. CO doğrusunu cetvel ve pergelle belirleyiniz. (*Hüseyin Demir*)

A84. İki ve üç basamaklı sayılarla ilgili olarak

$$\begin{aligned} ABC &= (DE)^2 \\ CBA &= (ED)^2 \end{aligned}$$

sistemini çözünüz. (*Hüseyin Demir*)

A85. $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ sayısını n, m tamsayı olmak üzere $n+m\sqrt{2}$ şeklinde ifade ediniz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y81. F odağı ve d doğrultmanı ile belirli parabol ile bir m uzunluğu verildiğinde, parabolün odağından geçen m uzunluktaki bir kirişin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Y82. Eşkenar bir ABC üçgeninin içinde ya da üzerinde alınan değişken bir P noktasına göre ayak üçgeni DEF, ve AD, BE, CF doğruları noktadaş ise P'nin geometrik yerini belirleyiniz. (*Hüseyin Demir*)

Y83. $1, 2, \ldots, n$ tamsayılarını rastgele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şeklinde sıralayıp $T = |a_1-a_2| + |a_2-a_3| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n-a_1|$ toplamını hesaplarsak elde edebileceğimiz en büyük T değerini bulunuz.

Y84. Her $x \in [-1,1]$ için $f(f(x)) = -x$ koşulunu sağlayan bir $f : [-1,1] \to [-1,1]$ fonksiyonu var mıdır? (*H. Turgay Kaptanoğlu*)

Y85. Bir X kümesinin h elemanlı k tane alt kümesi $X_1, X_2, \ldots, X_k$ veriliyor: $X_i \subseteq X$, $|X_i| = h$, $i = 1,\ldots,k$. $\min|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k|$'nin, $k \leq C(m,h)$ özelliğine sahip en küçük m sayısına eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A71. Bir teğetler dörtgeninde karşılıklı iki kenar birbirine eşitse, içteğet çember merkezinin diğer iki kenarın orta noktalarından eşit uzaklıkta olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ yazalım ve $a \geq c$, $b = d$ varsayalım. $[AB]$ ve $[CD]$'nin orta noktalarını E ve F ile, içteğet çemberin merkezini de I ile gösterelim. C ve D noktalarının BI ve AI doğrularında yansımaları sırasıyla C' ve D' olsun. Tabii ki C' ve D', AB doğrusu üzerinde kalmalıdır. $[C'D']$'nün orta noktası E'dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |C'D'| &= |BC'| + |AD'| - |AB| \\ &= b + d - a = a + c - a = c = |CD| \end{aligned}$$

olup, ICD ve $IC'D'$ üçgenleri eşittir. Bu üçgenlerin ortak I köşesine ait kenarortayların uzunlukları olan $|IE|$ ve $|IF|$ eşit olmalıdır.

(Çözenler: *Atasağun Baykal, Ergün Yereneri, Suat Namlı, Burhan Biçer, Ruhi Tabur, Alaatin Aktaş, Ali Tombak, Emre Alkan.*)

A72. A, B, C köşeleri karşısındaki dışteğet çemberlerin yarıçapları sırasıyla r_a, r_b, r_c olan bir ABC üçgeninin içindeki bir P noktasından BC, CA, AB kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla D, E, F olsun.

$$|AE| + |AF| = |BF| + |BD| = |CD| + |CE|$$

olması için gerek ve yeter şartın

$$|PD| : |PE| : |PF| = r_b + r_c - r_a : r_c + r_a - r_b : r_a + r_b - r_c$$

olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $2s = a + b + c$ olsun. ABC'nin içteğet çemberinin yarıçapını da r ile gösterelim. $x = |PD|$, $y = |PE|$, $z = |PF|$ koyarak $|AE|$ ve $|AF|$'yi hesaplayalım: P'den AE'ye çizilen paralel AB'yi L'de kessin, AC üzerinde $PEML$ bir dikdörtgen teşkil edecek şekilde bir M noktası alalım.

$$|LM| = |PE| = y$$

olup,

$$\begin{aligned} |AE| &= |AM| + |ME| \\ &= y \cot A + |PL| = y \cot A + z \csc A \end{aligned}$$

dır. Aynı yöntemle

$$|AF| = |AL| + |LF| = y \csc A + z \cot A$$

olup,

$$\begin{aligned} |AE| + |AF| &= \frac{y(1 + \cos A) + z(1 + \cos A)}{\sin A} \\ &= \frac{(y+z)(1 + \cos A)}{\sin A} \\ &= \cot \frac{A}{2}\,(y+z) = \frac{s-a}{r}(y+z) \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde de

$$|BF| + |BD| = \frac{s-b}{r}(z+x)$$

ve

$$|CD| + |CE| = \frac{s-c}{r}(x+y)$$

elde edilir. Bu miktarların eşit olması için gerek ve yeter şart olarak

$$(s-a)(y+z) = (s-b)(z+x) = (s-a)(x+y),$$

veya bu üç miktarın da üçgenin alanına bölünmesi suretiyle

$$\frac{y+z}{r_a} = \frac{z+x}{r_b} = \frac{x+y}{r_c},$$

ve nihayet bunlara eşdeğer olarak

$$x : y : z = r_b + r_c - r_a : r_c + r_a - r_b : r_a + r_b - r_c$$

bulunur.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Emre Alkan.*)

A73. $[AB]$ doğru parçasını çap kabul eden γ çemberi ile aynı doğru parçasını büyük çap kabul eden φ elipsi göz önüne alınsın. γ üzerinde değişken bir P noktasından AB'ye indirilen dikmenin φ'yi kestiği noktalardan P'ye yakın olanı Q olsun. P noktasından γ'ya çizilen normalle, Q noktasından φ'ye çizilen normalin kesim noktasının geometrik yeri nedir? (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. γ çemberini ve φ elipsini $a > b > 0$ olmak üzere sırasıyla

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ve} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemleriyle gösterebiliriz. Bir θ değişkeni ithal edilmek suretiyle $P = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ ve $Q = (a\cos\theta, b\sin\theta)$ yazabiliriz. Küçük birer hesapla, P'den γ'ya çizilen normalle, Q'dan φ'ye çizilen normalin denklemlerinin, $c^2 = a^2 - b^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sin\theta\, x - \cos\theta\, y &= 0 \\ a \sin\theta\, x - b\cos\theta\, y &= c^2 \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

olduğu, bunların kesim noktasının koordinatlarının da

$$x = \frac{c^2}{a-b}\cos\theta \quad \text{ve} \quad y = \frac{c^2}{a-b}\sin\theta$$

olduğu görülür. Böyle noktalar

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{c^2}{a-b}\right)^2 = (a+b)^2$$

denklemini sağlayacaklardır. Yani geometrik yer, verilen çember ve elipsle merkezdeş bir çemberdir.

(**Çözenler:** *Ruhi Tabur, Alaattin Aktaş, Atasağun Baykal, Ali Tombak.*)

A74. Toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımı en fazla kaç olabilir?

Çözüm. Toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımıyla elde edilebilecek en büyük sayı N olsun. Yani

$$N = A_1 A_2 \cdots A_k$$

olup

$$19 = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$$

dir. Herhangi bir $i = 1, 2, \ldots, k$ için $A_i \geq 4$ halinde, toplamı değiştirmeden A_i kaldırılıp yerine A_i'den daha büyük olan $2(A_i - 2)$ koyulabileceğinden $A_i = 2$ veya $A_i = 3$ olmalıdır. 19 sayısını, 3'lerin adedi mümkün olduğu kadar büyük olacak şekilde 2'lerin ve 3'lerin toplamı olarak yazmak için, 5 tane 3 ve 2 tane 2 kullanmak gerekeceğinden, toplamı 19 olan artı tamsayıların çarpımıyla elde edilebilecek en büyük sayı, $2^2 3^5 = 972$'dir.

(**Çözenler:** *Emre Alkan.*)

A75. Her hangi bir p asal sayısı için, p, $2^{m+1} + 3^m - 17$'yi bölecek şekilde sonsuz tane m artı tamsayısının bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. $p = 2$ ve $p = 3$ hallerinde çözüm kolay olduğu için (neden?), $p \neq 2, 3$ farzedelim. Her n artı tamsayısı için $m = p^n + 1$ koyularak

$$\begin{aligned} 2^{m+1} + 3^m - 17 &= 2^{p^n+2} + 3^{p^n+1} - 17 \\ &= 4(2^{p^n} - 2) + 3(3^{p^n} - 3) \end{aligned}$$

elde edilir ki, küçük Fermat teoremine göre p asal sayısı hem $2^p - 2$'yi hem de $3^p - 3$'ü, dolayısıyla da (dikkat!) $2^{p^n} - 2$'yi ve $3^{p^n} - 3$'ü, böylece de $2^{m+1} + 3^m - 17$'yi bölecektir.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Emre Alkan.*)

Y71. $ab = cd$ eşitliğini sağlayan $a, b, c, d > 0$ tamsayıları verildiğinde $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$'nin hiç bir zaman asal olamayacağını gösteriniz.

Çözüm. $ab = cd$ olduğuna göre, $a = pq$, $b = rs$, $c = pr$, $d = qs$ olacak şekilde $p, q, r, s \geq 1$ tamsayıları bulunabilir. (Neden?) Böylece

$$\begin{aligned} N &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= p^2q^2 + r^2s^2 + p^2r^2 + q^2s^2 \\ &= (p^2 + s^2)(q^2 + r^2) \end{aligned}$$

olup, N asal olamaz.

(**Çözenler:** *Selçuk Alsan, Ali Tombak, Fırat Aydın, Metin Bekil, Atasağun Baykal, Namık Gök, Ercan Şahin, Cengiz Yılmaz, Çağatay Candan.*)

Y72. p^2, q'nun bir katı olacak şekilde p, q tamsayıları verildiğinde, $x^2 + px + q = 0$ denkleminin çözümleri α, β olsun. Her $n \geq 2$ tamsayısı için $(\alpha^n + \beta^n)/q$'nun bir tamsayı olduğunu ispat ediniz.

Çözüm. $\alpha + \beta = -p$ ve $\alpha\beta = q$ olduğundan, herhangi bir $n \geq 2$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} \alpha^n &= -p\alpha^{n-1} - q\alpha^{n-2} \\ \beta^n &= -p\beta^{n-1} - q\beta^{n-2} \end{aligned}$$

olup,

$$\alpha^n + \beta^n = -p(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - q(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \quad (*)$$

dir. $n = 2$ halinde

$$\alpha^2 + \beta^2 = p^2 - 2q$$

olup, p^2, q'nun katı olduğundan $(\alpha^2 + \beta^2)/q$ tamsayı olmalıdır. Şimdi, $k \leq n$ için $(\alpha^k + \beta^k)/q$'nun tamsayı olduğunu varsayarsak, $(*)$ eşitliğinden $(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})/q$'nun da bir tamsayı olduğu görülür. Böylece tümevarımla her $n \geq 2$ için $(\alpha^n + \beta^n)/q$ bir tamsayı olmalıdır.

(**Çözenler:** *Atasağun Baykal, Tamer Adanır, Fırat Aydın, Ali Tombak, Suat Namlı, Ruhi Tabur, Emre Alkan.*)

Y73. Hem $x > 1$, hem de $x^{1/(1-x)}$'in rasyonel sayı olabilmesi için gerek ve yeter şartın, $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere, $x = 1 + 1/n$ olduğunu gösteriniz. (Dikkat: Rasyonel bir $x > 1$ sayısı için $x^{1/(1-x)}$ ile gösterilmesi mümkün olan sayılardan artı ve gerçel olanını kastediyoruz.)

Çözüm. $x > 1$ ve $x^{1/(1-x)}$ sayılarının rasyonel olduklarını varsayalım. $x = m/n$ ve $m > n$ olacak şekilde, aralarında asal m ve n artı tamsayıları vardır.

$$y = x^{1/(1-x)} = x^{n/(m-n)}$$

olup,

$$(xy)^n = (xx^{n/(m-n)})^n = y^m$$

dir. m, n aralarında asal olduklarından,

$$sm + tn = 1$$

olacak şekilde s ve t tamsayıları bulunabilir. Böylece

$$y = ((xy)^s y^t)^n$$

olup,

$$x^{1/(m-n)} = y^{1/n} = (xy)^s y^t$$

sayısı da rasyoneldir. Demek ki,

$$x^{1/(m-n)} = \frac{a}{b}$$

olacak şekilde aralarında asal $a, b \geq 1$ tamsayıları bulunabilir. O zaman da

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = x = \frac{m}{n}$$

olup,

$$mb^{m-n} = na^{m-n}$$

dir. m ve n aralarında asal olduklarından

$$m = a^{m-n} \quad \text{ve} \quad n = b^{m-n}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} m-n &= a^{m-n} - b^{m-n} \\ &= (a-b)(a^{m-n-1} + a^{m-n-2} + \cdots + b^{m-n}) \end{aligned}$$

bulunur ki, bu ancak

$$m - n = a - b = 1$$

veyahut da $m = n + 1$, yani

$$x = \frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

halinde mümkündür. Diğer taraftan

$$x = 1 + \frac{1}{n}$$

ise

$$x^{1/(1-x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/(1-(1+1/n))} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

olup, hem $x > 1$, hem de $x^{1/(1-x)}$ rasyoneldir.

(**Çözenler:** *Namık Gök, Emre Alkan, Atasağun Baykal.*)

Y74. Bir ABC üçgeninde $[CA]$, $[AB]$, $[BC]$ kenarları üzerine ilk ikisi dışa, sonuncusu içe doğru CAB', ABC', BCA' eşkenar üçgenleri kurulsun. A' noktasının $[B'C']$ doğru parçasının orta noktası olması için ABC üçgeninin eşkenar olmasının gerek ve yeter olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Çözüm. Eğer ABC eşkenarsa, A' noktasının $[B'C']$ doğru parçasının orta noktası olacağı aşikârdır. Tersine olarak, A''nün $[B'C']$ doğru parçasının orta noktası olduğunu farz edelim. $\sphericalangle C'BA' = \sphericalangle ABC$ (neden?), ve $|BA'| = |BC|$, $|BC'| = |BA|$ olduğundan, $C'BA'$ ve ABC üçgenleri eşittir. Böylece

$$|A'C'| = |AC|,$$

benzer şekilde de

$$|A'B'| = |AB|$$

dir. A', $[B'C']$'nün orta noktası olduğundan

$$|AB| = |A'B'| = |A'C'| = |AC|,$$

diğer taraftan da A', B', C' doğrudaş olduğundan $\sphericalangle BAC = 60°$ olmalıdır. Demek ki ABC eşkenardır.

(**Çözenler:** *Ergün Yaraneri, Tamer Adanır, Atasağun Baykal, Alaattin Aktaş, Emre Alkan.*)

Y75. Bir $ABCD$ karesinin içinde $|PA| = 1$, $|PB| = 2$, $|PC| = 3$ olacak şekilde bir P noktası varsa, bu karenin kenar uzunluğu ne olmalıdır?

Çözüm. $\alpha = \sphericalangle ABP$ ve $a = |AB| = |BC| = |CD| = |DA|$ yazalım. PAB ve PBC üçgenlerinde kosinüs teoremi uygulanarak,

$$\begin{aligned} a^2 + 4 - 4a\cos\alpha &= 1 \\ a^2 + 4 - 4a\sin\alpha &= 9, \end{aligned}$$

veya

$$\cos\alpha = \frac{a^2+3}{4a} \quad \text{ve} \quad \sin\alpha = \frac{a^2-5}{4a}$$

elde edilir. Bu denklemlerin karelerini taraf tarafa toplamak suretiyle

$$(a^2+3)^2 + (a^2-5)^2 = 16a^2,$$

veya

$$a^4 - 10a^2 + 17 = 0;$$

buradan da $a = \sqrt{5+\sqrt{8}}$ bulunur. ($a = \sqrt{5-\sqrt{8}}$ karenin dışında bir P noktası haline tekabül eder.)

(**Çözenler:** *Emre Alkan.*)