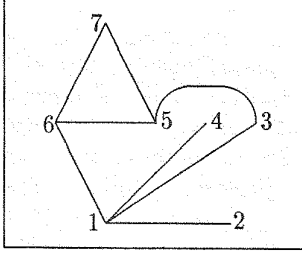


BİR TANE RASGELE ÇİZGE VAR!

Ali Nesin *

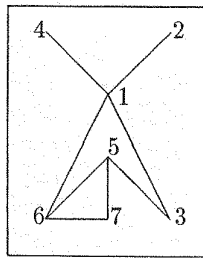
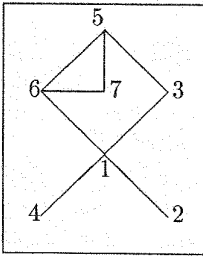
Bir çizge (graf), sezgisel olarak, noktardan ve noktaları ikiye ikiye birleştiren (doğru ya da eğri) çizgilerden oluşur. Herhangi iki nokta birleşmek zorunda değildir. Örneğin,



7 noktalı bir çizgedir. Noktalara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 adlarını verdik. Birleştirdiğimiz noktalar şunlar:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \\ \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}.$$

Bu iki ögelik kümelere *bağıntı* adı da verilir. Noktaları nasıl bir çizgiyle birleştirdiğimiz önemli değil. Hatta çizgiler kesişebilir bile (kesiştikleri yere çizgenin bir noktasını koymayız o zaman). Noktaların yerleri de önemli değil. Okur neyin önemli olduğunu merak edebilir! Önemli olan hangi noktayla hangi nokta arasında çizgi (yada bağıntı) olduğu. Başka bir şey önemli değil. Örneğin, yukarıdaki çizgeyle, aşağıdaki çizgeler aynı çizgelerdir:



* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

¹ N , 'nokta'nın N 'si, \mathcal{B} ise 'bağıntı'nın \mathcal{B} 'si.

² (x, x) ögesinin \mathcal{B} 'de olmaması, x 'le x arasında bağıntı olmaması demektir. Bu koşulu kabul etmemizin ciddi hiç bir nedeni yok. 'Çizge'nin tanımında bu koşulu koşmayan kitaplar vardır. Bizim bu koşulu kabul etmemizin tek nedeni çizgelerimizin daha basit olmalarını sağlamak. Matematiksel bir gerekçemiz yok.

Bu yazıda ilginç olduğu kadar da şaşırtıcı bir teorem kanıtlayacağız. Size sonsuz tane nokta verdim:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

noktalarını. Bu noktalardan bir çizge yapmanızı istiyorum. Her iki nokta için yazı-tura atacağız. Yazı gelirse noktaları birleştireceksiniz, tura gelirse birleştirmeyeceksiniz. Her iki nokta için yazı-tura atmayı bitirdiğinizde (!) noktaların adlarını silin. Hangi noktanın 1 noktası, hangi noktanın 2 noktası olduğu belli olmasın. Elinizde adsız noktalar ve bir takım çizgiler kalacak. Ben de aynı şeyi yapacağım. Sizin çizgenize bakmadan... Böylece adsız iki *rasgele çizge* elde edeceğiz. Sizin rasgele çizgeniz ve benimkisi. Şimdi çizgelerimizi karşılaştıralım. İki çizgenin de aynı olduklarını göreceğiz. Tıpatıp birbirine benziyorlar! Sanki biri öbürünün burnundan düşmüş. İnanılır gibi değil ama doğru! Ne sihirdir ne keramet, matematiktir matematik! Dahası var. Diyelim, ben noktaları birleştirmek için yazı-tura atmadım da zar attım. 6 geldiğinde noktaları birleştirdim, gelmediğinde birleştirmedim. Sizse yazı-tura attınız. Noktaların adlarını sildiğimizde gene aynı çizgeleri elde ederiz!

'Çizge' kavramının matematiksel tanımıyla başlayalım. N bir küme olsun. \mathcal{B} , N 'nin iki ögelik altkümelerinden oluşan bir küme olsun¹. Eğer her $x \in N$ için, $(x, x) \notin \mathcal{B}$ ise, (N, \mathcal{B}) çiftine bir *çizge* denir². Yukarıdaki örnekte,

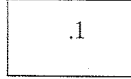
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

ve

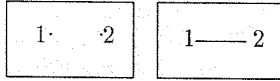
$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \\ \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$$

olarak alınmıştır. Rasgele çizgeleri tanımlamadan önce az noktalı çizgeleri bulalım.

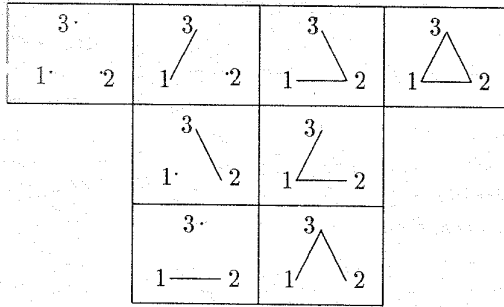
Eğer $N = \{1\}$ ise, yani N 'de bir nokta varsa, \mathcal{B} boşküme olmak zorunda. Dolayısıyla $N = \{1\}$ üzerine bir tek çizge kurulabilir. İşte o çizge:



Şimdi de iki noktalı çizgelere bakalım. $N = \{1, 2\}$ olsun. Bu durumda \mathcal{B} ya boşkümedir yada $\{\{1, 2\}\}$ kümesidir. Demek ki iki noktalı iki çizge var:



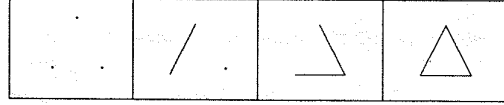
Şimdi amacımız üç noktalı çizgeleri bulmak. Ama bu çizgelerden çok olduğundan, arada unuttuğumuz olmasın diye önce n noktalı kaç tane çizge olduğunu bulalım. n noktalı, $2^{\binom{n}{2}}$ tane çizge olduğunu iddia ediyorum, ve hemen kanıtlayorum: N kümesinin n tane ögesi varsa, $\binom{n}{2}$ tane iki öğelik altkümeleri vardır. \mathcal{B} iki öğelik altkümelerden oluştuğundan, \mathcal{B} için $2^{\binom{n}{2}}$ seçeneğimiz var. Demek ki n noktalı $2^{\binom{n}{2}}$ tane çizge vardır. Eğer $n = 3$ olarak alırsak, bundan 3 noktalı 8 tane çizge olduğu çıkar. Bu 8 çizgeyi teker teker bulalım. $N = \{1, 2, 3\}$ olsun. İşte 8 çizge:



Üç nokta arasındaki bağıntıları yazı-tura atarak karar verecek olursak, yukarıdaki çizgelerden birini elde etme olasılığı $1/8$ 'dir.

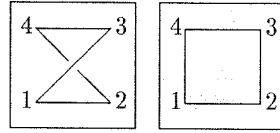
Yukarıdaki çizgelerden noktaların adlarını, yani sayıları silerseniz, çizge sayımız azalır.

Örneğin, bir bağıntısı olan üç çizgenin noktalarının adları silindiğinde bir çizge olurlar. Bunun gibi, iki bağıntısı olan üç çizgeden de bir adsız çizge elde ederiz. Böylece noktaların adını yazmadığımızda dört çizgemiz kalır:



Eğer çizgeyi yazı-tura atarak bulmuşsak, yani her bağıntının olasılığı $1/2$ ise, bu adsız çizgelerin olasılıkları sırasıyla $1/8$, $3/8$, $3/8$ ve $1/8$ 'dir.

İki çizgenin noktalarının adlarını sildiğimizde aynı çizgeyi elde etmek ne demektir? Bunun matematiksel tanımını bilmek bu yazı için gerekli değildir, bu yazı için sezgiler yeterlidir. Bir örnek daha verelim ki kuşkuyla yer kalmasın. Aşağıdaki iki çizgeye bakalım.



Bu iki çizge birbirlerine çok benzerler. Tek ayrımları noktalarının adlarıdır. Soldaki çizgede 3 ve 4 noktalarının yerlerini değiştirirsek (bağıntılarıyla birlikte) sağdaki çizgeyi buluruz. Yani noktaların adları olmasaydı iki çizge arasında bir ayrım olmayacaktı.

Soldaki çizgenin bağıntıları şunlar:

$$\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 3\}, \{3, 1\}\}.$$

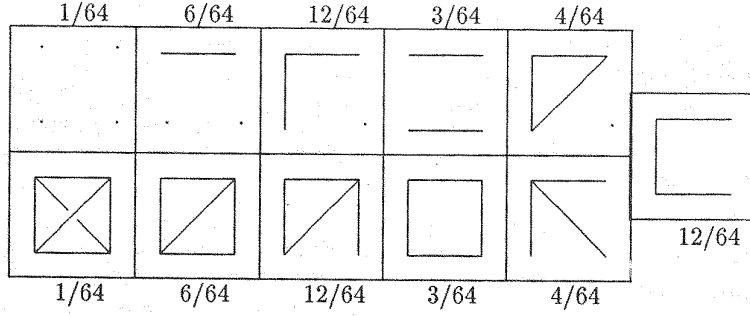
Sağdaki çizgenin bağıntılarıysa,

$$\mathcal{B}' = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}.$$

Şimdi, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$ göndermesini (fonksiyonunu) ele alalım. Bu gönderme, \mathcal{B} bağıntılarını \mathcal{B}' bağıntılarına gönderiyor. İşte iki çizgenin noktaları silindiğinde aynı çizge bulunması bu demektir³.

Dört noktalı ve adsız çizgeleri bulalım. Bunları bağıntı sayısına göre bulabiliriz: önce hiç bağıntısı olmayanlar, sonra bir bağıntısı olanlar, sonra iki bağıntısı olanlar...

³ Bunu matematiksel olarak ifade edelim: (N, \mathcal{B}) ve (N', \mathcal{B}') iki çizge olsunlar. Eğer $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ eşitliğini sağlayan ve birebir ve örten olan bir $f: N \rightarrow N'$ göndermesi varsa, (N, \mathcal{B}) ve (N', \mathcal{B}') çizgelerine eşyapısal çizgeler denir. İki eşyapısal çizgenin birbirinden tek ayrımı noktalarının adlarıdır. Bu çizgelerden birindeki noktaların adları uygun bir biçimde değiştirildiğinde (x noktasına $f(x)$ denildiğinde örneğin), öbür çizge bulunur.



Çizgelere iliştirilen 1/64, 6/64, 3/64 gibi sayılar, bağıntılara karar vermek için yazı-tura atıldığında, çizgenin elde edilme olasılığıdır. Yukarıda yaptığımız hesaplardan, 4 noktalı çizge sayısının $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ olduğunu biliyoruz. Bir bağıntılı çizge sayısı kaçtır? Dört noktadan ikisini seçip aralarına bir bağıntı koymamız gerekiyor. Demek ki $\binom{4}{2} = 6$ tane bir bağıntılı çizge var. Dolayısıyla bir bağıntılı çizge elde etme olasılığımız $6/64^4$.

Şimdi sonsuz rasgele çizgelere gelelim. N kümesi

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

gibi pozitif doğal sayılardan oluşan küme olsun. Bunlar noktalarımız. İki nokta arasında bağıntı olup olmadığına karar vermek için yazı-tura atacacağız. Böylece bir \mathcal{B} bağıntılar kümesi elde edeceğiz. Bu çizgeye \mathcal{R} adını verelim (\mathcal{R} , 'rasgele'nin R'si).

\mathcal{R} çizgesi hakkında ne söyleyebiliriz? Rasgele çizge olduğundan hiç birşey bilmemiz olası değil diye düşünebiliriz. İlk bakışta öyle bile görünse, ikinci bakışta \mathcal{R} çizgesi üzerine çok şey bildiğimiz anlaşılır. Basit bir örnekle başlayalım.

Rasgele çizgenin herhangi iki nokta arasındaki "uzaklığı" en fazla iki olduğunu kanıtlayalım; yani bir noktadan bir başka noktaya gidebilmek için üçüncü bir noktadan geçilerek gidilebileceğini kanıtlayalım. \mathcal{R} rasgele çizgesinde rasgele iki nokta alalım; diyelim 1 ve 2 noktalarını. Savım şu: öyle bir üçüncü nokta vardır ki, bu üçüncü nokta hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır. Savımı kanıtlayalım. 3 noktasını ele alalım. Eğer şanslı bir günümdeyse, 3 noktası dilediğim gibi bir noktadır,

yani hem 1 noktasıyla, hem de 2 noktasıyla bağıntılıdır. Bunun böyle olma olasılığı $1/4$. Demek ki $1/4$ olasılıkla 3 noktası varlığını iddia ettiğim noktalardan biri olacak. Öte yandan $3/4$ olasılıkla 3 noktası istediğim gibi bir nokta olmayacak. Şimdi 3 ve 4 noktasını ele alalım. Bu iki noktadan hiçbirinin dilediğim gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^2$. Eğer n tane nokta alırsak, bu n noktadan hiçbirinin dilediğim gibi bir nokta olmama olasılığı $(3/4)^n$; en az bir tanesinin dilediğim gibi bir nokta olma olasılığıysa $1 - (3/4)^n$. Ama n büyüdükçe $(3/4)^n$ azalıyor, sıfıra yaklaşıyor. Dolayısıyla $1 - (3/4)^n$ sayısı bire yaklaşıyor. Demek ki, 3, 4, 5, 6, ... noktalarından hiçbirinin benim istediğim gibi bir nokta olmama olasılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0,$$

ve en az birinin benim istediğim gibi bir nokta olma olasılığı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 1.$$

Demek ki 1 olasılıkla dilediğim gibi bir nokta vardır.

Rasgele çizgeler üzerine bir başka sonuç daha çıkaralım. \mathcal{R} , rasgele çizgeniz olsun. Noktaların adlarını silin. Sonra rasgele bir sonlu çizge alın, örneğin yazının en başında örnek olarak sunduğumuz 7 noktalı çizgeyi. Onun da adlarını silin. Bu adsız ve sonlu çizgeye \mathcal{S} adını verelim. \mathcal{S} sonlu çizgesi, rasgele çizgenizin bir altçizgesidir, yani \mathcal{R} çizgesinin içinde bulabilirsiniz \mathcal{S} çizgesini. Neden? Şu nedenden: Rasgele çizgenizin noktalarını yedişer yedişer ayırım.

⁴ Yukarıdaki 11 çizge rasgele konulmamıştır. Alt alta gelen çizgeler birbirleriyle ilintilidir. Üst kattaki herhangi bir çizgeyi alalım. Bu çizgenin bağıntılarını silelim ve bağıntı olmayan yerlere bağıntı koyalım. Böylece alt kattaki çizgeyi elde ederiz. En sağdaki çizge için aynı şeyi yapacak olursak gene aynı çizge elde edilir. Alt alta gelen iki çizgenin olasılıkları aynıdır. Yazı-tura atıldığında aynıdır. Eğer zar atarak bağıntılara karar verecek olursak olasılıklar değişebilir. Örneğin, zar attığımızda 6 gelirse bağıntı koymaya, gelmezse bağıntı koymamaya karar verecek olursak, çizgenin bağıntı sayısı çoğaldıkça olasılığı azalır.

Örneğin şöyle (noktaların adlarını silmiştik; aşağıdaki sayılar noktaların adları değil; yalnızca birbirinden değişik noktalar olduğunu vurgulamak için kullanıyoruz bu sayıları):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{1, 2, \dots, 7\} \\ \mathcal{R}_2 &= \{8, 9, \dots, 14\} \\ &\vdots \\ \mathcal{R}_n &= \{7n + 1, 7n + 2, \dots, 7n + 7\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

\mathcal{R}_1 altçizgesine bakalım. Bu çizgenin \mathcal{S} çizgesi olma olasılığı en az $1/2^{\binom{7}{2}}$, olmama olasılığıysa en çok $1 - 1/2^{\binom{7}{2}}$. Bu olasılığa α adını verelim.

$$0 < \alpha \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{7}{2}} < 1$$

eşitsizliklerine dikkatinizi çekerim. \mathcal{R}_1 çizgesinin \mathcal{S} çizgesi olmama olasılığı α . \mathcal{R}_1 ve \mathcal{R}_2 çizgelerinden hiçbirinin \mathcal{S} çizgesi olmama olasılığıysa α^2 . Genel olarak, $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ çizgelerinden hiçbirinin \mathcal{S} çizgesi olmama olasılığı α^n ; en az birinin \mathcal{S} olma olasılığıysa $1 - \alpha^n$. α , 1'den küçük olduğundan, α^n sayıları gittikçe küçülür, sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla $1 - \alpha^n$ bire yaklaşır. Sonsuz tane \mathcal{R}_n çizgesi olduğundan, bunlardan birinin \mathcal{S} olma olasılığı 1'dir. Dolayısıyla, \mathcal{R} çizgesinde \mathcal{S} 'e tıpatıp benzeyen bir altçizge (1 olasılıkla, yani yüzde yüz) vardır.

Son olarak yazının başında iddia ettiğim savı kanıtlayayım. Sizin elinizde rasgele bir çizge var. Bu çizgeye $\mathcal{R} = (N, \mathcal{B})$ diyelim, noktalarınız da

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

olsun. Benim çizgeye $\mathcal{R}' = (N, \mathcal{B}')$ diyelim. Noktalarım

$$a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

olsun. Bu iki çizgenin noktalarının adlarını değiştireceğim. a ve a' noktalarını b ve b' yapacağım, ve bu işi öyle yapacağım ki, noktaların adlarını sildiğimizde iki çizgenin birbirinin aynısı olduğu apaçık belli olacak. Bağıntılara dokunmayacağım. Yalnızca eski adları silip yeni adları koyacağım yerine, sonradan bu yeni adları da sileceğim.

Adına "gelgit yöntemi" denilen kullanacağım yöntem matematikte az bilinir.

Birinci Adım. \mathcal{R} çizgesinden başlayalım işe. a_1 noktasına b_1 diyelim bundan böyle. \mathcal{R}' çizgesinde b_1 'e benzeyen bir nokta bulabilir miyiz? Elbette! Herhangi bir nokta b_1 'e benzer.

Örneğin a'_1 noktası. Bundan böyle a'_1 noktasına b'_1 adını verelim. Çizgelerimizin noktaları şimdi-lik şöyle:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &: b_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots \\ \mathcal{R}' &: b'_1 \ a'_2 \ a'_3 \ a'_4 \ a'_5 \ \dots\end{aligned}$$

İkinci Adım. Şimdi \mathcal{R}' çizgesine geçelim. a'_2 noktasına b'_2 adını verelim. Ve $\{b'_1, b'_2\}$ altçizgenine bakalım. b'_1 ve b'_2 arasında bağıntı olabilir ya da olmayabilir. \mathcal{R} çizgesinde öyle bir a_n noktası bulmak istiyorum ki $\{b_1, a_n\}$ çizgesiyle $\{b'_1, b'_2\}$ çizgesi - noktalarının adları dışında - birbirinin aynı olsun.

Diyelim b'_1 ve b'_2 arasında bir bağıntı var. O zaman, \mathcal{R} çizgesinde öyle bir a_n noktası seçmeliyim ki, a_n noktasıyla b_1 noktası arasında bağıntı olsun. Böyle bir a_n noktası bulabilir miyim? 1 olasılıkla bulabileceğimi iddia ediyorum. Çünkü \mathcal{R} çizgesinin hiç bir noktasının b_1 noktasına bağıntılı olmama olasılığı sıfırdır. Bu şöyle anlaşılır. m herhangi bir doğal sayı olsun. a_2, a_3, \dots, a_{m+2} noktalarından hiçbirinin b_1 noktasıyla bağıntısı olmamasının olasılığı $1/2^m$. Dolayısıyla bu noktalardan en az birinin dilediğim gibi bir nokta olma olasılığı $1 - 1/2^m$. Sonsuz tane noktamız olduğundan, noktalardan birinin dilediğim gibi bir nokta olma olasılığı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = 1.$$

Dolayısıyla 1 olasılığıyla öyle bir nokta var. Bu nokta a_2 olmayabilir, a_3 olmayabilir, belki a_4 de olmayabilir, ama bir tanesi b_1 'e bağıntılı olacak. \mathcal{R} çizgesinde böyle bir nokta seçelim. Diyelim a_4 noktası b_1 noktasına bağıntılı. a_4 noktasına bundan böyle b_2 diyelim. Şimdi $\{b_1, b_2\}$ altçizgesiyle, $\{b'_1, b'_2\}$ altçizgesi - noktalarının adları dışında - birbirinin aynı.

Eğer b'_1 ile b'_2 arasında bağıntı yoksa, \mathcal{R} çizgesinde b_1 ile bağıntısı olmayan bir nokta seçilir ve bu noktaya b_2 adı verilir.

a_4 noktasına b_2 adını verdiğimiz varsayarak çizgelerimizin noktalarını yeni adlarıyla sıralayalım:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &: b_1 \ b_2 \ a_2 \ a_3 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ \dots \\ \mathcal{R}' &: b'_1 \ b'_2 \ a'_3 \ a'_4 \ a'_5 \ a'_6 \ a'_7 \ \dots\end{aligned}$$

Üçüncü Adım. \mathcal{R} çizgesine geri dönelim. a_2 noktası adı değiştirilmeyen ilk nokta. Bu noktayı b_3 yapalım. $\{b_1, b_2, b_3\}$ altçizgesine bakalım. Diyelim, b_3 ile b_1 bağıntılı, ama b_3 ile