L'HÔPITAL KURALI ÜSTÜNE

Mefharet Kocatepe *

Belirsiz limit hesaplarında oldukça yaygın olarak kullanılan bir kural vardır: L'Hôpital Kuralı. Bu yazımızın konusu olan bu kuraldan önce biraz tarihçesinden söz edelim.

Bu kuralın aslında John Bernoulli'ye ait olduğunu biliyor muydunuz? [2] numaralı kaynakta çıkan bir yazıya göre, 1694 yılında John Bernoulli (1667–1748), soylu bir Fransız ailesinden gelen ve amatör bir matematikçi olan eski öğrencisi l'Hôpital (1661–1704) ile bir anlaşma yapar. Bu anlaşmaya göre Bernoulli, l'Hôpital için problemler çözecek ve onu analiz (calculus) konusundaki güncel gelişmelerden haberdar edecek, buna karşılık olarak l'Hôpital kendisine yılda 300 pound verecektir. Bu problemlerden birisi de 0/0 problemi olarak bilinen limit problemidir ve anlaşmaya göre Bernoulli bu problemi çözer. l'Hôpital 1696 yılında analiz notlarını bir kitap halinde yayınladığında 0/0 kuralı da bir teorem olarak bu kitapta görülür. Ancak l'Hôpital, kitabında bu kuralın Bernoulli'ye ait olduğunu belirtmiştir. Ayrıca kitaptaki tüm malzemenin kendisine ait olduğu izlenimini vermemek için de kitaba kendi adını koymamıştır. Fakat yine de Bernoulli, l'Hôpital'i kopyacılıkla suçlamıştır. Bu suçlamadan haberdar olmayan yayınevi l'Hôpital'in ölümünden sonra, kitabı l'Hôpital'in adıyla tekrar yayınlayıp yangına körükle gitmiştir. Ancak yakın geçmişte, tarih Bernoulli'nin iddiasını kabul etmiştir, ama kural yine de l'Hôpital Kuralı olarak anılmaktadır.

l'Hôpital Kuralı çok kullanışlı ve popüler bir kuraldır. Ancak bazı durumlarda yanlış kullanılmaktadır. Bu yazımızda bu noktaya da dikkatinizi çekmek istiyoruz.

Bu kuralın kanıtı için önce Rolle Teoremi gereklidir (bakınız [1]).

Rolle Teoremi. $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir olan f fonksiyonu, $f(a) = f(b)$ koşulunu sağlarsa, (a,b) aralığı içinde, $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir x_0 noktası vardır.

* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

Cauchy Ortalama Değer Teoremi. $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir olan f ve g fonksiyonları için, (a,b) aralığında,

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

eşitliğini sağlayan bir x_0 noktası vardır.

Kanıt. $g(a) = g(b)$ ise Rolle Teoremini $[a,b]$ üzerinde g fonksiyonuna uygulayarak, $g'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a,b)$ sayısı buluruz. Bu durumda yukarıdaki eşitlik, her iki tarafı da 0 olduğu için sağlanır.

$g(a) \neq g(b)$ ise

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ve $F(x) = f(x) - Kg(x)$ olsun. F fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde süreklidir ve (a,b) üzerinde türevlenebilir. $F(a) = F(b)$ koşulu da K'nin tanımından dolayı sağlandığı için Rolle Teoremini F fonksiyonuna $[a,b]$ aralığı üzerinde uygulayabilir ve $F'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a,b)$ sayısı buluruz. $F'(x_0) = 0$ eşitliği teoremin ifadesindeki eşitlikle eş anlamlıdır.

L'Hôpital Kuralı. f ve g fonksiyonları

(i) (a,b) üzerinde türevlenebilir,

(ii) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$,

(iii) her $x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$,

(iv) $\lim_{x \downarrow a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

ise, $\lim_{x \downarrow a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$'dir.

Kanıt. $f(a) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = 0$ ve aynı şekilde $g(a) = 0$ olarak tanımlayalım ve f ve g fonksiyonlarını $[a,b)$ aralığına sürekli olarak genişletelim. Herhangi bir $a < x < b$ noktası alalım ve Cauchy Ortalama Değer Teoremini, $[a, x]$ aralığı üstünde f ve g fonksiyonlarına uygulayalım. Buna göre,

$$(f(x) - \underbrace{f(a)}_{0})g'(x_0) = (g(x) - \underbrace{g(a)}_{0})f'(x_0)$$

eşitliğini sağlayan bir $x_0 \in (a, x)$ sayısı vardır. Hipotez gereği $g'(x_0) \neq 0$. $g(x) = 0$ olsaydı, Rolle Teoremini $[a, x]$ aralığı üstünde g fonksiyonuna uygulayarak, $g'(c) = 0$ eşitliğini sağlayan bir $c \in (a, x) \subset (a, b)$ bulabilecektik. Bu da hipotezle çelişeceğinden, $g(x) \neq 0$ olmak zorundadır. Böylece yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını, sıfırdan farklı olan $g(x)g'(x_0)$ sayısı ile bölerek,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

buluruz. Bu x_0 sayısı a ile x arasında olduğu için x'e bağımlıdır; bu nedenle $x_0 = x_0(x)$ olarak yazalım ve $\lim_{x \downarrow a} x_0(x) = a$ olduğunu gözleyelim. Böylece

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x_0(x))}{g'(x_0(x))} = \lim_{t \downarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)} = L$$

bulunur.

Not. (a) Bu kuralda bütün $\lim\limits_{x \downarrow a}$ yerine $\lim\limits_{x \uparrow a}$ veya $\lim\limits_{x \to a}$ konursa kural yine geçerlidir, fakat hipotez (i) ve (iii)'teki aralıkların uygun bir şekilde değiştirilmesi gerekir.

(b) a bir gerçel sayı veya $+\infty$ veya $-\infty$ olabilir.

(c) L bir gerçel sayı veya $+\infty$ veya $-\infty$ olabilir.

(d) Bu kural yalnızca $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz durumlarında uygulanır.

Örnek 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = ?$ Burada $f(x) = x - \sin x$ ve $g(x) = x^3$ tür. Kuralın tüm hipotezleri sağlanmaktadır (özellikle $x = 0$'ın her hangi bir delik komşuluğunda $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ olduğuna dikkat edelim). Kuralı bir kere uygulayarak

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \quad \left(\text{hâlâ } \frac{0}{0}\right)$$

bulunur. Kuralı bir daha uygulayarak

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

bulunur.

Örnek 2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = ?$ Burada limitin sağdan veya soldan oluşuna göre $+\infty - \infty$ veya $-\infty + \infty$ belirsizliği vardır. Ancak kuralı uygulayabilmek için, yukarıdaki ifadeyi bölüm şeklinde yazmak gerekir.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

ifadesine kuralı iki kere uygulayarak

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$$

bulunur.

Örnek 3. $\lim\limits_{x \uparrow \infty} \sin x$ limiti bulunamadığından $\lim\limits_{x \uparrow \infty} e^{-\sin x}$ limiti de yoktur. Fakat yukarıdaki ifadeyi

$$\lim_{x \uparrow \infty} \frac{2x + \sin 2x}{(2x + \sin 2x)e^{\sin x}}$$

şeklinde yazalım. $2x + \sin 2x \geq 2x - 1$ ve $(2x + \sin 2x)e^{\sin x} \leq (2x + 1)e$ olduğundan, yukarıdaki ifade $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği şeklindedir. L'Hôpital kuralını uygularsak

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \uparrow \infty} \frac{2 + 2\cos 2x}{(2 + 2\cos 2x)e^{\sin x} + (2x + \sin 2x)\cos x\, e^{\sin x}} \\
&= \lim_{x \uparrow \infty} \frac{4\cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x (4\cos x + 2x + \sin 2x)} \\
&= \lim_{x \uparrow \infty} \frac{4\cos x}{e^{\sin x}(4\cos x + 2x + \sin 2x)} = 0
\end{aligned}$$

olur. Buradaki son eşitliği şöylece gösterebiliriz:

$$-4 \leq 4\cos x \leq 4$$

ve

$$e(2x+5) \geq e^{\sin x}(4\cos x + 2x + \sin 2x) \geq \frac{(2x - 5)}{e}$$

olduğu için, yeterince büyük x'ler için

$$\frac{-4}{e(2x+5)} \leq \frac{4\cos x}{e^{\sin x}(4\cos x + 2x + \sin 2x)} \leq \frac{4e}{2x - 5},$$

ve iki uçtaki terimin $x \uparrow \infty$ için limitleri 0 olduğundan (yani eşit olduğundan) ortadaki ifadenin de limiti 0'dır. (Bu kurala *Sıkıştırma Kuralı* veya *Sandviç Teoremi* denir.)

Gördüğünüz gibi bu örnekte iki farklı yanıt bulduk: *limit yok* ve *limit* $= 0$. Bu çelişkiyi nasıl açıklarız? L'Hôpital kuralını genişletilmiş kesire uygularken, $f(x) = 2x + \sin 2x$ ve $g(x) = (2x + \sin 2x)e^{\sin x}$'tir ve aralığımız da bir $a > 0$ için (a, ∞) aralığıdır. Bu aralıkta f ve g türevlenebilir. Fakat

$$g'(x) = e^{\sin x}\cos x(4\cos x + 2x + \sin 2x)$$

ifadesi $\cos x$ teriminden dolayı her (a, ∞) aralığında sonsuz noktada sıfır olur. Sonuç olarak kuralımızdaki hipotez (iii) sağlanmamıştır ve bizim l'Hôpital kuralını uygulamamız yasal değildir. Sorunun doğru yanıtı *limit yok*tur.

Örnek 4. $g(x) = \sin x$ ve $f(x) = x^2\sin(1/x)$ için $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitine bakalım. $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ ve $-x^2 \le x^2\sin(1/x) \le x^2$ olduğundan Sıkıştırma Kuralına göre $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ olur. L'Hôpital Kuralını uygulayarak

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}\\ =\ &\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x} \overset{\text{tanım}}{=} \lim_{x\to 0} h(x).\end{aligned}$$

$\lim_{x\to 0} h(x) = A$ olsaydı, $\cos(1/x) = 2x\sin(1/x) - h(x)\cos x$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\cos(1/x) = 0 - A\cdot 1 = -A$$

olacaktı. ($\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$ olduğu yine Sıkıştırma Kuralı ile gösterilebilir.) Oysa $\lim_{x\to 0}\cos(1/x)$ limitinin olmadığı açıktır. (Niçin?) Bu hesaba göre $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limiti yoktur. Öte yandan,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x}{\sin x}$$

şeklinde yazalım.

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

limitlerini kullanarak

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

bulunur. Yine çelişkili bir sonuç elde ettik. Bu kez de l'Hôpital kuralının (iv) numaralı hipotezini ihlal ettik. Bu hipoteze göre ancak $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ limiti varsa $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ limiti hakkında birşey söyleyebiliyoruz. Fakat $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti yoksa kural hiçbir şey söylememektedir, yani kuralı uygulayamayız. Sonuç olarak bu sorunun doğru yanıtı *limit* $= 0$'dır.

Gördüğümüz gibi l'Hôpital kuralı çok kullanışlı bir kuraldır, fakat kolaylıkla hatalı kullanılabilir ve yanlış sonuçlar elde edilebilir. Bu yüzden, bu kuralı kullanırken lütfen dikkatli olalım.

KAYNAKÇA

[1] Ş. Alpay, *Rolle ve Ortalama Değer Teoremi*, *Matematik Dünyası*, **2**, sayı 5, 16–18 (1992).

[2] G.B. Thomas & R L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 8. baskı, Addison-Wesley, 1992.