ÇÖZÜMLER

Değerlendiren: Cem TEZER *

A66. Bir elips üzerinde alınan değişken bir X noktasından elipsin büyük ve küçük eksenlerine çizilen paralellerin elipsi X haricinde kestikleri noktaları birleştiren kirişle, X ten elipse çizilen normalin kesiştiği noktanın geometrik yeri nedir?

Çözüm. Sözkonusu elipsi $a > b > 0$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemi ile gösterelim. X in koordinatları (x_0, y_0) olsun. Büyük ve küçük eksenlere çizilen paraleller elipsi $Y(-x_0, y_0)$, $Z(x_0, -y_0)$ noktalarında keserler. YZ doğrusunun denklemi

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x$$

X den elipse çizilen normalin denklemi de

$$y - y_0 = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

olup, küçük bir hesapla bu doğruların

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}x_0, -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y_0\right)$$

noktasında kesiştiği görülebilir. Demek ki geometrik yer, elimizdeki elipsle merkezdeş ve bütün boyutları $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^{-1}$ oranında küçültülmüş bir elipstir.

(**Çözenler:** Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Ercan Şahin, Hasan Kullap, Alaattin Aktaş.)

A67. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde, ABC, BCD, CDA, DAB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin AB ve BC, BC ve CD, CD ve DA, DA ve AB kenarlarına değme noktaları sırasıyla A_2 ve B_1, B_2 ve C_1, C_2 ve D_1, D_2 ve A_1 olsun.

$$|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2| = |D_1D_2|$$

olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$, $g = (a + c)/2 = (b + d)/2$ (Neden ?) $h = (e + f)/2$ yazalım.

$$|AA_1| = \frac{a + d - f}{2}$$

$$|A_2B| = \frac{a + b - e}{2}$$

olup,

$$\begin{aligned} |A_1A_2| &= |AB| - |AA_1| - |A_2B| \\ &= a - \frac{a + d - f}{2} - \frac{a + b - e}{2} \\ &= h - g \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2| = |D_1D_2| = h - g$$

dir.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Murat Hikmet Beybağa, Alaattin Aktaş, Bayram Yenikaya, Turgay Uçkun.)

A68. Bir ABC üçgeninde $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ olsun. İçteğet çember merkezinin A, B, C köşelerine uzaklıklarını sırasıyla x, y, z ile, çevrel çember merkezinin BC, CA, AB kenarlarına uzaklıklarını sırasıyla k, l, ve m ile, içteğet çember yarıçapını da r ile gösterelim. $2s = a + b + c$ ise,

$$4\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l} + \frac{c}{m}\right) = \frac{xyzs}{klmr}$$

olduğunu gösteriniz. (*Hasan KULLAP*)

Çözüm. Önce, verilen gösterimlerin haricinde üçgenin çevrel çember yarıçapı için R, üçgenin alanı için de Δ yazarak,

$$\begin{aligned} r &= x\sin\left(\frac{A}{2}\right) = y\sin\left(\frac{B}{2}\right) = z\sin\left(\frac{C}{2}\right) \\ k &= R\cos A \\ l &= R\cos B \\ m &= R\cos C \end{aligned}$$

*ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

ve

$$\Delta = sr = \frac{abc}{4R}$$

olduğunu hatırlayalım.

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} \\ &= \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)} \\ &= \frac{2R \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ &= \frac{2R \sin A \sin B \sin C}{4\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)} \text{ (Neden ?)} \\ &= 4R \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\frac{r}{4R} = \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

ve

$$\frac{xyzr}{4R} = r^3$$

bundan da

$$\frac{xyzr\Delta}{abc} = r^3$$

ve nihayet

$$xyzs = abcr$$

bulunur. Bundan da

$$\begin{aligned} \frac{xyzs}{klmr} &= \frac{abc}{klm} = 8\tan A \tan B \tan C \\ &= 8(\tan A + \tan B + \tan C) \\ &= 4\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l} + \frac{c}{m}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Atasağun Baysal, Ercan Şahin, Fatih Uzunoğlu, Bayram Yenikaya.)

A69. Köşegenleri içinde kesişen bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olması için

$$det \begin{bmatrix} 0 & |AB| & |AC| & |AD| \\ -|BA| & 0 & |BC| & |BD| \\ -|CA| & -|CB| & 0 & |CD| \\ -|DA| & -|DB| & -|DC| & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olmasının gerek ve yeter olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$ ve

$$\Delta = det \begin{bmatrix} 0 & a & e & d \\ -a & 0 & b & f \\ -e & -b & 0 & c \\ -d & -f & -c & 0 \end{bmatrix}$$

yazarsak, sözkonusu matriste ikinci, üçüncü, dördüncü sütunlar sırasıyla c, $-f$, b ile çarpılıp dördüncü sütunda toplanarak,

$$b\Delta = det \begin{bmatrix} 0 & a & e & ac+bd-ef \\ -a & 0 & b & 0 \\ -e & -b & 0 & 0 \\ -d & -f & -c & 0 \end{bmatrix}$$

bu sefer de ikinci, üçüncü, dördüncü satırlar sırasıyla c, $-f$, b ile çarpılıp dördüncü satırda toplanarak,
$b^2\Delta =$ det

$$\begin{bmatrix} 0 & a & e & ac+bd-ef \\ -a & 0 & b & 0 \\ -e & -b & 0 & 0 \\ -(ac+bd-ef) & -0 & -0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= b^2(ac+bd-ef)^2$
ve böylece

$$\Delta = (ac+bd-ef)^2$$

elde edilir ki bu bağıntı ve Batlamyus teoreminden $ABCD$ nin bir kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter şartın $\Delta = 0$ olduğu görülür.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Murat Hikmet Beybağa.)

A70. İlki ikincisinin tamamen içinde kalan ve eşmerkezli olmayan α, β çemberleri verildiğinde, α ya dıştan, β ya içten teğet ve birbirine eşit olmayan herhangi iki çemberin dışhomoteti merkezinin α ve β nın kuvvet ekseni üzerinde kaldığını gösteriniz.

Çözüm. α ya dıştan, β ya içten teğet C ve C' çemberlerinin merkezlerini birleştiren doğru, α, β çemberlerinin kuvvet eksenini bir M noktasında kessin. (Kesmezse ?) M noktasının α ve β ya göre eşit olan kuvvetini evirtim kuvveti olarak, M noktasını da evirtim merkezi olarak almak suretiyle elde edilen evirtim, α ve β çemberlerinin her birini sabit bırakırken, C ve C' çemberlerini aralarında değiştirir. Demek ki M, C ve C' çemberlerinin dış (neden ?) homoteti merkezidir.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Atasağun Baysal.)

Y66. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde, içteğet çemberin AB, BC, CD, DA kenarlarına değdiği noktalar sırasıyla P, Q, R, S ise,

$$\frac{|AB||CD|}{|QS|^2}=\frac{|BC||DA|}{|PR|^2}$$

olduğunu ispat ediniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a=|AB|$, $b=|BC|$, $c=|CD|$, $d=|DA|$, $p=|QS|$, $q=|PR|$ yazalım. AD, BC doğruları L noktasında, AB, CD doğruları da M noktasında kesişsin. (Kesişmezse ?) $\angle ALB=2\lambda$, $\angle BMC=2\mu$ olsun. ABC üçgenini $ABCD'$ paralelkenarına tamamlayıp, $DD'C$ ve $DD'A$ üçgenlerinde kosinüs teoreminden,

$$a^2+c^2-2ac\cos 2\mu=|DD'|^2=b^2+d^2-2bd\cos 2\lambda$$

bundan da

$$(a+c)^2-2ac(1+\cos 2\mu)=(b+d)^2-2bd(1+\cos 2\lambda)$$

ve

$$a+c=b+d$$

kullanılarak,

$$ac\cos^2\mu=bd\cos^2\lambda \qquad (*)$$

elde edilir. İçteğet çember merkezi I, içteğet çember yarıçapı da r ile gösterilerek,

$$\cos\lambda=\cos(\angle IQS)=\frac{p}{2r}$$

ve benzer şekilde

$$\cos\mu=\frac{q}{2r}$$

bulunur ki, bunları (*)'la birleştirmek suretiyle,

$$\frac{ac}{p^2}=\frac{bd}{q^2}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Fatih Uzunoğlu, Alaattin Aktaş.)

Y67. Bir ABC üçgeninde BC, CA, AB kenarları üzerinde sırasıyla D, E, F noktaları alınsın. $AEDF$ bir paralelkenar ve

$$|DB|:|DC|=|AB|^2:|AC|^2$$

ise $BCEF$ nin bir kirişler dörtgeni olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$, $e=|DE|$, $f=|DF|$ koyalım : FBD ve EDC üçgenlerinin benzerliğinden,

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{|DB|}{|DC|}=\frac{|BF|}{|DE|}=\frac{c-e}{e}=\frac{|FD|}{|EC|}=\frac{f}{b-f}$$

olup,

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{c-e}{e}$$

den

$$e=\frac{b^2c}{b^2+c^2},$$

$$\frac{c^2}{b^2}=\frac{f}{b-f}$$

den de

$$f=\frac{bc^2}{b^2+c^2}$$

elde edilir. O halde

$$|AE||AC|-|AF||AB|=fb-ec=0$$

olup, B, C, E, F noktaları çemberdeştir.

(**Çözenler:** Almas R imov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Cengiz Yılmaz, Hasan Kullap, Yaşar Kandur, Burhan Biner, Murat Hikmet Beybağa, Bayram Yenikaya, Alaattin Aktaş, Turgay Uçkun.)

Y68.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]\frac{x^n}{n!}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}x^n$$

olduğunu gösteriniz. (*Necdet BATIR*)

Çözüm. Gözönüne alınan seriler, x in bütün değerleri için yakınsak, böylece de mutlak yakınsak olduğundan, yakınsaklık mütalaalarına bir daha temas etmeyeceğiz.

$$H=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}$$

yazalım. **Y50** den dolayı

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}\right]\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)x^n \end{aligned}$$

[illegible] $k = 1, 2, 3, \cdots$ için

$$A_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}$$

[illegible]

$$B_k = \frac{1}{k!}$$

[illegible]

$$[illegible] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right)x^n \qquad \text{(Neden ?)}$$

[illegible] Demek ki H yi temsil eden seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}x^n$$

[illegible] e^x i temsil eden $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ dizilerinin [illegible] olmalıdır.

(Çözenler: Almas Rımov, Atasağun Baysal.)

Y69. Verilen herhangi bir n artı tamsayısı için hiç biri asal olmayan, içlerindeki her çift arasında asal olan ve bir aritmetik dizi teşkil eden n tamsayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Herhangi bir $N \geq 2$ tamsayısı ve $2 \leq k \leq N$ şeklinde herhangi diğer bir k tamsayısı için, $N! + k$ nin hiç bir zaman asal olmadığını hatırlayalım. n tamsayısı verildikte, $p > n$ olacak şekilde bir p asal sayısı ve $N \geq p + (n-1)n!$ olacak şekilde de bir N tamsayısı alalım. Bu suretle uzunluğu n olan ve elemanlarının hiç birisi asal olmayan bir $N! + p$, $N!+p+n!$, $N!+p+2n!, \cdots N!+p+(n-1)n!$ aritmetik dizisi elde ederiz. Bu diziye ait her çiftin aralarında asal olduğunu iddia ediyoruz : Eğer $i \neq j$ için $N!+p+in!$ ve $N!+p+jn!$ sayılarının ikisini de bölen bir q asal sayısı olsaydı, q bu sayıların farkını da, yani $(i-j)n!$ i de bölmeli, böylece $q \leq n$ olmalıdır. (Neden ?) O zaman q, $N!$ i, dolayısıyla p yi de bölebilmelidir ki bu imkansızdır.

(**Çözenler:** Atasağun Baysal, Almas Rımov.)

Y70. Bir ABC eşkenar üçgeninin çevrel çemberinin A köşesi karşısındaki yayı üzerinde herhangi bir P noktası alındığında, PAB, PAC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarının toplamından PBC üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapı çıkartılarak elde edilen miktarın P noktasının konumundan bağımsız olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. PBC, PCA, PAB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarını sırasıyla r_1, r_2, r_3 le gösterelim. $a = |BC| = |CA| = |AB|$, $R_1 = |PA|$, $R_2 = |PB|$, $R_3 = |PC|$ yazalım. Batlamyus teoreminden,

$$|PA||BC| = |PB||CA| + |PC||AB|,$$

yani

$$R_1 a = R_2 a + R_3 a$$

veya

$$R_1 = R_2 + R_3$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{R_2+R_3-a}{2}\tan 60^\circ = \frac{R_1-a}{2}\sqrt{3} \\ r_2 &= \frac{R_3+R_1-a}{2}\tan 30^\circ = \frac{R_3+R_1-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ r_3 &= \frac{R_1+R_2-a}{2}\tan 30^\circ = \frac{R_1+R_2-a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 - r_3 &= \frac{2R_1+R_2+R_3-2a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\quad -\frac{R_1-a}{2}\sqrt{3} \\ &= \frac{3R_1-2a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{R_1-a}{2}\frac{3}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

tür.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Yaşar Kandur, Fatih Uzunoğlu, Bayram Yenikaya, Turgay Uçkun.)