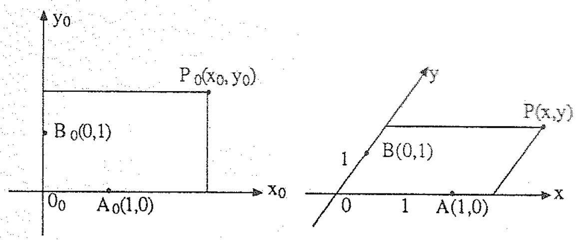
İLGİN DÜZLEM GEOMETRİ (III)

Hüseyin Demir *

III. İlgin Düzlemde Analitik Geometri

İlgin bir teoremin geometrik bir ispatını veremediğimizde ya da bir problemin çözümünü geometrik olarak bulamadığımızda yahut istek üzerine doğrudan analitik geometriye başvururuz.

İlgin bir Oxy koordinat sistemi, Öklid düzlemindeki bir $O_0x_0y_0$ koordinat sisteminden ilgin dönüşümle elde edilir (Şekil 29).

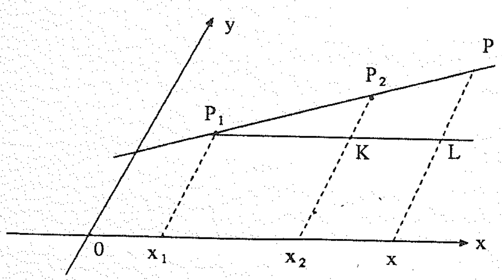


Şekil 29

Eksenler üzerinde birim uzunlukları veren $A(1,0), B(0,1)$ noktaları keyfi olarak seçilebilir.

Doğru Denklemi

$P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ gibi farklı iki noktadan geçen doğrunun eğimi ve denklemi, Öklit düzleminde olduğu gibi tanımlanır ve elde edilir.



Şekil 30

Eğimi şöyle tanımlarız:

$$m(P_1P_2) = \frac{\text{ordinatlar farkı}}{\text{apsisler farkı}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Buna göre P_1P_2 nin denklemi

$$y - y_1 = m(y - y_1) \tag{8}$$

olur.

Bu da doğruların genel denklemi olarak

$$ax + by + c = 0 \tag{9}$$

eşitliğini verir.

$P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ den geçen doğrunun denkleminin determinant biçimi şudur:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Gerçekten, $x = x_i$, $y = y_i$ $(i = 1,2)$ alındığında eşitlik sağlanır ve determinantın, birinci satıra göre açıldığında, (3) biçiminde olduğu görülür.

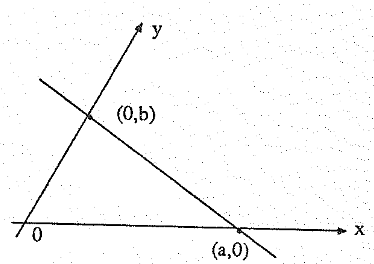
Sonuç. d ve d', eğimleri m, m' olan farklı iki doğru ise $d//d' \Leftrightarrow m = m'$ geçerlidir.

İlgin düzlemde diklik kavramı yer almadığından $mm' = -1$ eşitliği diklik diye bir şey ifade etmez.

(4)'te $P_1(a,0), P_2(0,b)$ alındığında P_1P_2 nin denklemi olarak

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{11}$$

elde edilir.



Şekil 31

* ODTÜ Matematik Bölümü emekli öğretim üyesi

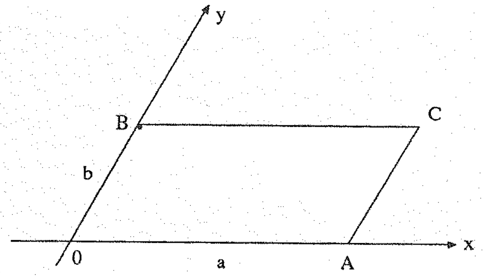
Üçgenlerin Alanları

İki hale ayıracağız:

a) Köşelerinin koordinatları verilen üçgenin alanı. İlgin koordinat sisteminde $O(0,0)$ $A(a,0)$ $C(a,b)$ $B(0,b)$ paralelkenarının alanını (Şekil 32)

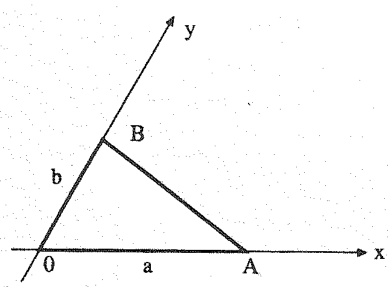
$$|OACB| = ab \tag{12}$$

olarak tanımlıyoruz. Bu, Öklit koordinat sistemide dikdörtgenin alanını verir.

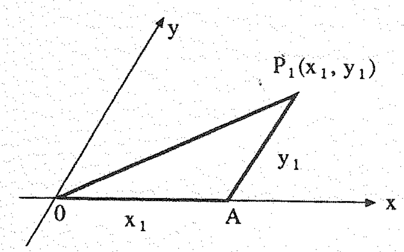


Şekil 32

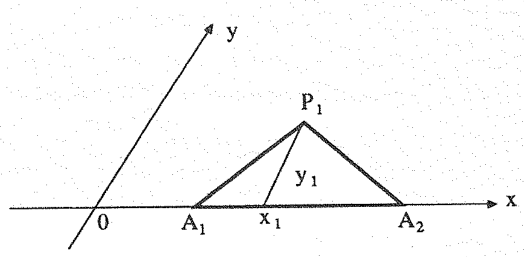
Bir $P_1(x_1,y_1)P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3)$ üçgeninin alanını elde etmek üzere aşağıdaki şekillerde özel korunumlu koyu çizilmiş üçgenlerin alanları yanlarına yazılmıştır:



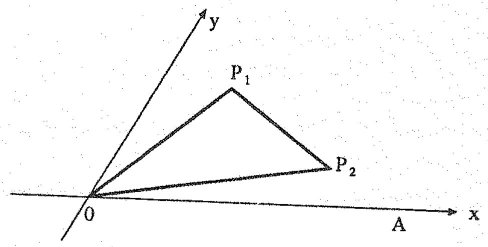
Şekil 33, alan $= \frac{1}{2}ab$



Şekil 34, alan $= \frac{1}{2}x_1y_1$

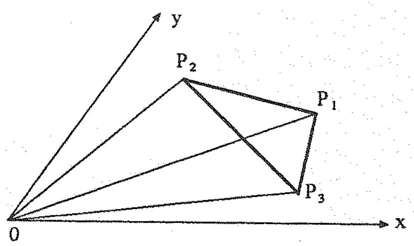


Şekil 35, alan $= \frac{1}{2}(a_2 - a_1)y_1$



Şekil 36,
alan $|P_1OA| - |P_2OA| = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$

Genel halde (Şekil 37)



Şekil 37

$$\begin{aligned}|P_1P_2P_3| &= |P_1P_2O| + |P_1OP_3| - |P_2OP_3| \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_3 - x_3y_1) \\ &\quad -\frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_1)\end{aligned}$$

olup

$$|P_1P_2P_3| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

elde edilir.

Sonuç. Determinant sıfır olduğunda P_1, P_2, P_3 noktaları doğrudaştır.

b) Kenarlarına denklemleri verilen üçgenin alanı. Derginizde, ikişer ikişer kesişen ve denklemleri

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

olan d_1, d_2, d_3 gibi üç doğrunun oluşturduğu $d_1d_2d_3$ tam üçgeninin $|d_1d_2d_3|$ alanının hesaplanması sorulmuş (Matematik Dünyası, Cilt 2, Sayı 3, s.23, Y38) ve cevabın

$$|d_1d_2d_3| = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2}{A_{13}A_{23}A_{33}} \qquad (14)$$

olduğu ispatlanmıştır (Matematik Dünyası, Cilt 2, Sayı 5, s.31). Burada A_{13}, A_{23}, A_{33}, kofaktörlerdir.

Sonuç. (7)'de verilen determinant sıfır olduğunda d_1, d_2, d_3 doğruları noktadaştır.

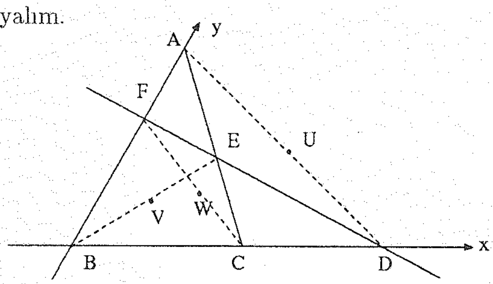
Şimdi bu iki sonucun bazı uygulamalarını verelim.

Teorem. (Newton doğrusu). Bir tam dörtgende köşegenlerin orta noktaları doğrudaştır.

Bir ABC üçgeni ile bir DEF keseninden oluşan bir dörtgeni koordinat sistemine Şekil 38'deki gibi yerleştirerek

$B(0,0)$, $C(2c,0)$, $D(2d,0)$, $A(0,2a)$, $F(0,2f)$

koyalım.



Şekil 38

E nin koordinatlarını bulmak üzere (5)'i kullanarak AC, DF nin

$$\frac{x}{2c} + \frac{y}{2a} = 1 \Rightarrow ax + cy = 2ac$$
$$\frac{x}{2d} + \frac{y}{2f} = 1 \Rightarrow fx + dy = 2df$$

bulup denklemlerini ortak çözelim.

$$E\left(2cd\frac{a-f}{ad-cf}, 2af\frac{d-c}{ad-cf}\right)$$

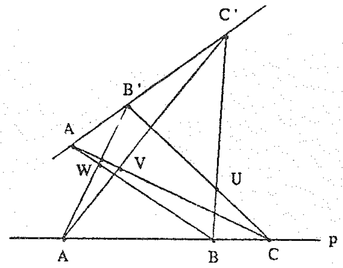
bulunur ve (6)'dan hesaplar sonucu

$$\begin{vmatrix} d & a & 1 \\ c & f & 1 \\ cd\frac{a-f}{ac-cf} & af\frac{d-c}{ad-cf} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

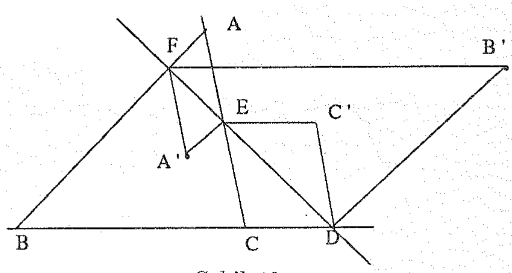
Meraklı okurlara şu iki teoremin analitik ispatlarını vermelerini öneriyoruz.

Teorem. (Pappus). p, p' gibi iki doğru üzerinde A, B, C ve A', B', C' noktaları bu sıralamalarla alındığında $BC' \cap B'C, CA' \cap C'A, AB' \cap A'B$ noktaları doğrudaştır (Şekil 39).



Şekil 39

Teorem. DEF doğrusu bir ABC üçgeninin bir keseni (Şekil 40) ve $AEA'F, BFB'D, CDC'E$ birer paralelkenar ise A', B', C' doğrudaştır.

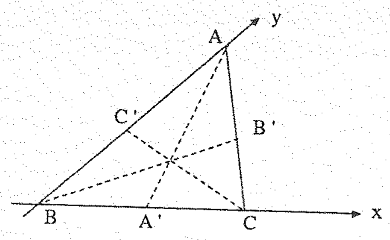


Şekil 40

Şimdi doğruların noktadaşlığına ilişkin iki örnek verelim.

Teorem. Bir üçgende kenarortaylar noktadaştır.

Üçgen ABC olsun ve BC doğrusu x ekseni, BA doğrusu ise y ekseni seçilsin.



Şekil 41

$A(0,2a)$, $B(c,a)$, $C(2c,0)$ koyup $A'(c,0)$, $B'(c,a)$, $C'(0,a)$ elde edilir.

Kenarortayların denklemleri olarak şunları buluruz:

$$AA' : \frac{x}{c} + \frac{y}{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2ax + cy - 2ac = 0$$

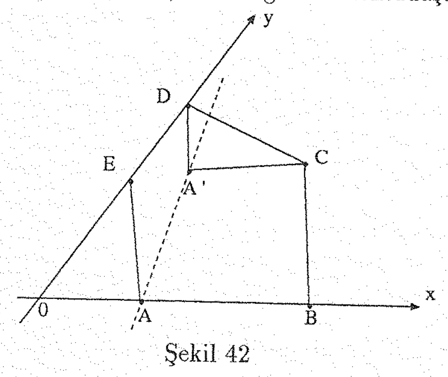
$$BB' : \frac{y}{x} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad ax - cy = 0$$

$$CC' : \frac{x}{2c} + \frac{y}{d} = 1 \quad \Rightarrow \quad ax + 2cy - 2ac = 0$$

Bunlara da (7) uygulanırsa determinantın sıfır olduğu görülür:

$$\begin{vmatrix} 2a & c & -2ac \\ a & -c & 0 \\ a & 2c & -2ac \end{vmatrix} = 0.$$

Teorem. Bir $ABCDE$ beşgeninde A köşesinden geçen AB, AC doğrularına, A nın karşı $[CD]$ kenarının C, D uçlarından çizilen paralel doğrular bir A' noktasında kesişsinler $(A'C//AB, A'D//AE)$. Benzer çizimlerle B', C', D', E' noktaları bulunursa AA', BB', CC', DD', EE' doğruları noktadaştır.



Şekil 42

Konikler.

Konikler ikinci dereceden eğriler olup genel denklemleri

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (15)$$

biçimindedir.

İlk üç katsayıdan en az biri sıfırdan farklıdır ve koniğin türü dış koinvariant denilen

$$\Delta = B^2 - AC \qquad (16)$$

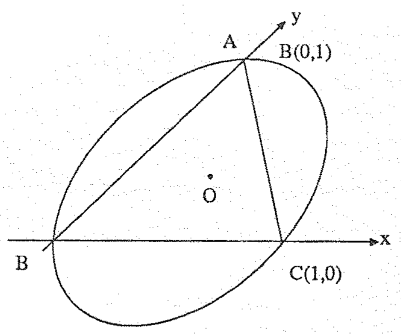
sayısının işaretiyle belirlidir. Δ 'nın negatif sıfır ya da pozitif olması halinde konik elips, parabol ya da hiperboldür.

Konumuzu bir problemle kapatıyoruz.

Problem. Bir üçgenin çevrel elipslerinin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Bu geometrik yeri tahmin etmek oldukça zordur. Çözüme ancak analitik olarak ulaşabiliriz.

Üçgenin köşeleri $A(0,1), B(0,0), C(1,0)$ olarak alındığında (Şekil 43), elips (0, 0), (1, 0),



Şekil 43

(0, 1) noktalarından geçtiğinden

$$F = 0, \ A + 2D = 0, \ C + 2E = 0$$

elde edilir ve (8) denklemi

$$f(x,y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - Ax - Cy = 0 \quad (8')$$

denklemine dönüşür.

Elipsin $O(x_0, y_0)$ merkezi

$$\begin{aligned} f_x &= 2Ax + 2By - A = 0 \\ f_y &= 2Bx + 2Cy - C = 0 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlar. Sistem çözüldüğünde

$$\begin{aligned} 2\Delta x_0 &= BC - AC \\ 2\Delta y_0 &= BA - AC \end{aligned}$$

elde edilir. AC yerine (9)'dan $B^2 - \Delta$ yazıldığında

$$\begin{aligned} (2x_0 - 1)\Delta &= BC - B^2 \\ (2y_0 - 1)\Delta &= BA - B^2 \end{aligned}$$