ÜÇ BİR DÖRT BİR VE GERİSİ

Şafak Alpay *

"Pi" sayısı herhangi bir dairenin çevresinin çapına oranı olarak tanımlanır. Eski Çinli matematikçiler tarafından 3, Ahmes papirüsünde ise 3.1605 olarak kabul edilen 'pi' sayısı için kullanılan yaygın imge Yunan abc'sinde p harfine karşılık gelen π dir. İlk kez 18. yy başlarında İngilizler tarafından kullanılan bu imge 1737'de Euler'in de kullanması ile gelenek haline gelen bir gösterim olmuştur. $q, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ tam sayılar olmak üzere

$$q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \cdots + \frac{q_n}{10^n} + \cdots = q, q_1 q_2 \cdots q_n \cdots$$

biçimindeki toplama ondalık açılım dendiğini biliyoruz [1]. Her gerçel sayının tek bir ondalık açılımla temsil edildiğini ve her ondalık açılımın da bir gerçel sayı olduğunu yine [1]'den biliyoruz.

Yazar		Tarih	Basamak Sayısı
Ptolemy	M.Ö.	150	4
Viete		1579	10
Romanus		1593	16
Van Ceulen		1610	33
Snell		1621	35
Sharp		1699	72
Machin		1706	101
Vega		1794	137
Desa		1844	201
Rutherford		1853	441
Shanks		1873	707†
Aberdeen Prov. Grd.		1949	2.036
Watson Sci. Lab.		1954	3,093
Genuys ve Felton		1959	10.000
Shanks ve Wrench		1961	100.000
Gilloud ve Fillatoire		1966	250.000
Gilloud ve Dichampt		1967	500.000
Gilloud ve Bouyer		1976	1.000.000
Miyochi ve Nakayama		1981	2.000.038
Tamura ve Kanada		1982	4.194.293‡

† Bu açılımda sadece ilk 527 basamak doğrudur.
‡ Gerekli bilgisayar zamanı 2 saat 53 dakika idi.

Bir ondalık açılımın rakamları belli uzunlukta rakam blokları biçiminde tekrarlanırsa bu açılıma periyodlu açılım denir. Kesirli sayıların ondalık açılımlarının periyodlu olduğunu ve periyodlu ondalık açılımların kesirli sayılar oldukları [1]'de kanıtlanmıştı. Daha sonra da göreceğimiz gibi π sayısı kesirli bir sayı değildir. 1770'de kanıtlanan bu gerçeğe kadar π sayısının açılımının merak edilmesi doğaldır.

π 'nin açılımı hakkında elde edilecek bilgi kesirli olup olmadığına karar verecekti. π nin açılım tarihi yukarıdaki çizelgede kısaca görülüyor.

π sayısının açılımı ile ilgili çözülememiş savlar vardır. Bunlardan biri π sayısının açılımında görünen sayıların tamamen rastgele olduğudur. Başka bir deyişle bu açılımda $0, 1, 2, \ldots, 9$ sayılarının elde edilme olasılığı $1/10$; $00, 01, \ldots, 99$ ikililerinin elde edilmesi olasılığı $1/100$; $000, 001, \ldots, 999$ üçlülerinin gözükmesi olasılığı $1/1000$ olarak ileri sürülmüştür. Yukarıda sıralanan hesaplamalar ünlü matematikçi John von Neumann tarafından yapılan π sayısı açılımındaki sayı dağılımının düzgün rastgele olduğu savını güçlendirmiştir. Henüz kanıtlanamayan bu savlar π hakkındaki sorulardan bazılarıdır.

Yukarıdaki hesaplamalar bize Arşimet'in M.Ö. 240 yılında bulduğu π 'nin alt ve üst sınırlarını veren yöntem kadar heyecan vermiyor. Arşimed birim çaplı dairede, daire içine çizilen düzgün kirişler çokgeni ile daire dışına çizilen düzgün teğetler çokgenini düşünüyor [2]. Düzgün çokgenlerin alanları kolayca hesaplandığından, 12, 24, 48 ve 96 kenarlı düzgün kiriş ve teğetler dörtgenlerinin alanlarını bularak π için $223/71 < \pi < 22/7$ eşitsizliğini başka bir değişle π için yaklaşık değer olarak 314'ü veriyor.

$[-1, 1]$ aralığındaki her x için

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

sonsuz toplamı $\tan^{-1} x$ 'e eşittir. 1671 yılında İskoçyalı matematikçi James Gregory'nin farkına vardığı bu gerçek ile birçok hesap yapılabilir. Örneğin $x = 1$ için

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

elde ederiz. 1699 yılında Sharp $\tan^{-1} x$ 'nin yukarıdaki seri açılımını $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ için kullanarak π sayısının ilk 71 basamağı hesaplamayı başarıyor. 1719 yılında De Laguy $\tan^{-1} x$ serisini $\sqrt{\frac{1}{3}}$ noktasında kullanarak π 'nin ondalık açılımında bilinen basamak sayısını 112'ye çıkarıyor. 1706'da Machin ise yine $\tan^{-1} x$ 'in seri açılımını ve

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\Big(\frac{1}{5}\Big) - \tan^{-1}\Big(\frac{1}{239}\Big)$$

eşitliğini kullanarak π 'nin ondalık açılımında ilk 100 basamağı bulabiliyor.

Bilgisayarlarda hesaplar ve doğrulamalar

$$\pi = 24\tan^{-1}\frac{1}{8} + 8\tan^{-1}\frac{1}{57} + 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

veya

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

gibi eşitlikler yardımı ile yapılıyor. Örneğin Miyashi ve Nakayama tarafından π 'nin açılımındaki 2 milyon küsuruncu basamağı veren hesaplamada

$$\pi = 32\tan^{-1}\frac{1}{10} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} - 16\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

gibi yine bir $\tan^{-1}$ formülü ile yapılıyor. Tamura ve Kanada'nın yöntemi $\tan^{-1}$ formülleri kullanan klasik yaklaşımdan farklı. Bu yazarlar 19. yüzyılda Legendre ve Gauss tarafından bulunan hesaplama yöntemlerini geliştiren yenileme (iteratif) yöntemleri kullanıyorlar. Matematiğin Sayısal Analiz dalının uğraştığı problemler hakkında bir fikir vermek amacı ile şimdi bu yöntemi verelim: $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alalım ve her n için

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}),\ b_n = (a_{n-1}b_{n-1})^{1/2}$$

ve

$$c_n = a_n^2 - b_n^2$$

tanımlayalım. Eğer

$$\pi_n = \frac{4a_{n+1}^2}{(1 - \sum_{j=1}^{n} 2^{j+1}c_j^2)}$$

olarak tanımlanırsa, $\lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi$ oluyor ve π_n ile π arasındaki fark (hata); $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ olmak üzere

$$|\pi - \pi_n| < \frac{\pi^2 2^{n+4}}{A^2}\exp(-\pi 2^{n+1})$$

ile veriliyor.

Şimdi π sayısının kesirli bir sayı olmadığını görelim. Bu gerçek için genellikle Legendre'e kredi verilmesine karşın 1770 yılında Lambert tarafından kanıtlanmıştır. Daha önce tam sayı değerli, tam sayı değişkenli fonksiyonlar ile ilgili basit bir sonucu görelim.

Yardımcı Teorem. $\mathbb{Z}$ tam sayılar olmak üzere $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ koşulunu sağlarsa, f bir yerden sonra sıfır sabit değerini alacaktır.

Kanıt. $n \to \infty$ iken $f(n) \to 0$ verildiğinden, $n \geq N_0$ için $|f(n) - 0| < \frac{1}{2}$ eşitsizliği sağlayacak N_0 tam sayısını (limit tanımından) bulabilirsiniz. $f(n) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $n \geq N_0$ için $f(n) = 0$ olmalıdır. □

Teorem. π sayısı kesirli bir gerçel sayı değildir.

Kanıt. Her n pozitif tamsayı ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için I_n

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x)\, dx$$

ile tanımlansın. İntegralleri alarak $2 \leq n$ için

$$\alpha^2 I_n = 2n(n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2} \qquad (5)$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz.

P ve Q α 'nın dereceleri $2n + 1$ den küçük, tamsayı katsayılı polinomları olmak üzere, n üzerinden tümevarımla

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P\sin(\alpha) + Q\cos(\alpha)) \qquad (6)$$

eşitliğini elde ederiz.[1]

Olmayana ergi metodunu kullanalım. Yani π kesirli bir sayı olsun. Böylece $\pi = \frac{a}{b}, b \neq 0$ olacak a, b tamsayıları bulabiliriz. (2) denkleminde α sayısı $\pi/2$ alınırsa, $J_n = \frac{b^{2n+1}}{n!} I_n$ ile

[1] $n!$ çarpanı (1) numaralı denklemdeki $n(n-1)$ den gelmektedir.

tanımlanan J_n bir tamsayıdır. I_n nin değeri yerine konarak

$$J_n = \frac{b^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \qquad (7)$$

elde edilir. Integral içindeki fonksiyon x 'in $(-1,1)$ aralığındaki değerleri için pozitif olduğundan, her n için $0 < J_n$ bulunur. Dolayısı ile, her n için, $J_n \neq 0$ buluruz. Neden? (3)'de her iki tarafın mutlak değeri alınır ve

$$C = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

olarak tanımlanırsa

$$|J_n| \leq \frac{|b|^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \leq C\frac{|b|^{2n+1}}{n!}$$

bulunur. Buradan $n \to \infty$ iken $J_n \to 0$ elde edilir. Yardımcı Teorem bir N_0 tamsayısından sonra $J_n = 0$ verir ki bu yukarıdaki, her n için, $0 < J_n$ ile çelişir. Bu çelişki π sayısının kesirli bir sayı olması varsayımı ile elde edildiğinden teorem kanıtlanmıştır. □

Katsayıları tamsayı olan bir polinomun kökü olan sayılara cebirsel sayılar denir. π sayısının önemli bir özelliği de cebirsel bir sayı olmamasıdır. 1794'de Legendre tarafından kanıtlanan π^2 nin de kesirli bir sayı olmadığı, Hermite'in 1882 π 'nin cebirsel bir sayı olmadığını kanıtladığı teoremleri için [3]'ü önereriz.

KAYNAKÇA

[1] Taner, T: Gerçel Sayı Nedir?, *Matematik Dünyası*, **1**, Sayı 2, 2-5 (1991).

[2] Demir, H.: Dörtgenleri Tanıyalım I, *Matematik Dünyası*, **3**, Sayı 1, 1-5 (1993).

[3] Stewart, I.: *Galois Theory*, Chapman and Hall, London 1973.

Sayın Şafak Alpay,

Cumhuriyet Gazetesi'nin eki olan BİLİM TEKNİK Dergisi'nin 5 Haziran 1993 tarihli ve 324. sayısındaki "Matematikte Macaristan'ın Başarısı ve Türkiye" yazınızı ilgiyle okudum.

Yazının sonlarında "... Matematik ve Tabiat Bilimleri Dergisi ve bu dergiyi çıkaran Nuri KUTULMUŞ..." denilmektedir.

Bu yazınızla hatıralarım tazelendiğinden 1 İkincikânun (Ocak) 1945'te yayımlanan 1. sayısında derginin adının "Matematik ve Tabii İlimler Mecmuası" (ki 2. sayıdan itibaren yazdığınız gibidir), çıkaranın (sahibinin) adının ise "M. Nuri KUTULMUŞ" olduğunu; ayrıca "Fiyatı 30 Kuruş" olan bu derginin Nazım TERZİOĞLU'ndan önceki Yazı İşleri Müdürü'nün ilk 4 sayı için "Mehmet GÖKYAY" olduğunu bildirmek istiyorum.

Yine o döneme ait olarak Adnan ERGENELİ, Feyyaz GÜRSAN, Turan TANIN tarafından çıkartılan ve ilk sayısı 20 Eylül 1944 tarihinde yayımlanan "MATEMATİK-FİZİK-KİMYA" dergisini de burada anmak yerinde olur.

Bendeki bilgiye göre bu tür dergilerden bunları izleyeni Süleyman ÖLÇEN, İsmail GÖKMEN, Seyfettin AYDIN, Halid TULTAY tarafından kurulan ve ilk sayısı 1965 Ekiminde yayımlanan "Matematik Öğretimi Dergisi"dir.

Bu bilgileri, editörlüğünü yürüttüğünüz Matematik Dünyası'nın bir abonesi olma yakınlığı nedeniyle sunuyorum.

Saygılarımla
Güngör BİNGÖL