LİMİTLER, LİMİTLER

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun *

Akıllı insan zehir sunsa al iç
Nobran bal şerbeti uzatsa sakın ha!
Ömer Hayyam

Gerçel sayı dizilerine ilişkin limit bilgisi çok önemlidir. Kendi başına çok önemli olmanın ötesinde, gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonların sürekliliklerini açıklama, kavrama ve kanıtlamada belki daha da önemlidir. Biz bu yazıda, hepsi de kendi başlarına yeterince ilginç olan dört ünlü limit probleminin çözümleri ile ilgileneceğiz. Supremum ve infimum kavramlarını ve bir gerçel sayıya yakınsamanın ne demek olduğunu az çok bilen herkesin, kanıtlamalara katılma çabası gösterdiğinde, anlatılanları kavrayacağını umuyoruz. Yalnızca gerçel sayı dizileri ile ilgileneceğiz.

Boş olmayan bir $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin bir *üst sınırı*, $\forall\ a \in A$ için $a \leq \alpha$ eşitsizliğini gerçekleyen α gerçel sayısıdır; *en küçük üst sınırı* yanı *supremumu* ise A'nın bu nitelemeye uyan özel üst sınırıdır, yani kendisinden kesin küçük kalan hiç bir gerçel sayının A'nın bir üst sınırı olamadığı üst sınırıdır; başka bir yazışla, A nın α üst sınırına ancak ve yalnız

$$\forall\, \epsilon > 0 \text{ için } \exists a_\epsilon \in A,\ \alpha - \epsilon < a_\epsilon$$

koşulu gerçeklendiğinde A kümesinin supremumu denir ve $\alpha = \sup A$ ya da $\alpha = \text{eküs } A$ yazılır. Alt sınır ve *en büyük alt sınır* yani *infimum* kavramları benzer biçimde tanımlanır.

Ana Teorem. i) Üstten sınırlı ve boş olmayan herhangi bir $A \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin tek bir supremumu vardır.

ii) Alttan sınırlı ve boş olmayan herhangi bir $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin tek bir infimumu vardır.

Problem 1. Bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinin, yakınsak bir alt dizisinin yakınsadığı gerçel sayıya $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisinin bir yığılma noktası* denir. Hatırlatma: İndisleri yani numaraları, kesinlikle artan $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < n_{m+1} < \cdots$ doğal sayıları olan terimlerin oluşturduğu $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisine, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir *alt dizisi* denir.

$$\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_{3n+2}\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$$

dizileri $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin alt dizi örnekleridir. Örneğin ilkinde $n_m = 2m-1$ dir. a_{n_m} teriminin esas dizideki numarasının n_m buna karşılık alt dizideki numarasının m olduğuna dikkat edilmelidir. Sonlu tane yığılma noktası olan bir kaç diziyi anımsayalım:

$$a_n = (-1)^n,$$

$$b_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{1}{n},$$

$$c_n = \begin{cases} (-1)^{[\frac{n}{2}]} + \frac{1}{n}, & n \text{ tek };\\ \frac{1}{\log n}, & n \text{ çift }. \end{cases}$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktaları yalnızca $x = -1$ ve $x = 1$'dir. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yalnızca $x = 0$ ve $x = 1$ yığılma noktalarına yakınsayan alt dizileri vardır. $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktaları ise $-1, 0$ ve 1'dir. Şimdi şuna dikkat edelim:

$$1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \ldots;$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots; \ldots;$$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{1}, \frac{1}{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{m}+\frac{1}{3}, \ldots; \ldots$$

rasyonel sayıları "sayılabilir tanedir", yani doğal sayılarla indislenebilirler (numaralanabilirler). Böyle bir numaralama ile bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi tanımlanmış olur. Bu dizinin tüm yığılma noktalarının

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots, 0$$

olduğunu okuyucu görebilmelidir. Demek ki sonsuz tane yığılma noktası olan gerçel sayı dizileri tanımlanabilir. Dahası, bütün pozitif rasyonel sayıları, ki sayılabilir tanedirler, numaralayarak tanımlanan $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm yığılma noktaları kümesi ise $[0, \infty)$ aralığıdır, neden? Herhangi

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinin tüm yığılma noktaları kümesinin infimumu $\underline{\lim}\ x_n$ ya da $\liminf_n x_n$ işareti ile gösterilir. Sözü edilen infimum yoksa $\underline{\lim}\ x_n = -\infty$ yazılır. $\overline{\lim} x_n$ ya da $\limsup_n x_n$ işareti ile de sözü edilen dizinin tüm yığılma noktalarının supremumu gösterilir. Şu bilgileri ekleyelim: i) Bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak ise tüm alt dizileri de aynı limite yakınsar; ii) $\underline{\lim}\ x_n$ ister bir gerçel sayı ister $-\infty$ olsun, daima $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir yığılma noktasıdır, yani $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin uygun bir alt dizisi $\underline{\lim}\ x_n$ değerine yakınsar; iii) Benzer gerçekler $\overline{\lim} x_n$ için geçerlidir. Bu ilk bölümde şu problemle uğraşacağız: *Sonlu tane yığılma noktası olan öyle sınırlı bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi bulalım ki, bu dizinin aritmetik ortalamalar dizisinin sonsuz tane yığılma noktası olsun.* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin aritmetik ortalamalar dizisi, terimleri $\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ olan $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisidir. Önce gerekli temel bilgileri görelim:

1.1. $\underline{\lim}\ a_n = \sup_n \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ ve $\overline{\lim} a_n = \inf_n \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ eşitlikleri herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için daima geçerlidir. Bunları, yazıyı uzatmamak için göstermiyoruz. O halde şu çok önemli sonuca ulaşılır: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı ise, yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $a \leq a_n \leq b$ gerçekleniyorsa, $a \leq \underline{\lim}\ a_n \leq \overline{\lim} a_n \leq b$ kolayca elde edileceğinden, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $[a,b]$ aralığındaki en az bir gerçel sayıya yakınsayan yakınsak bir alt dizisi vardır, neden?

1.2. Herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi ve bu dizinin herhangi bir $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi için daima $\underline{\lim}\ a_n \leq \underline{\lim}\ a_{n_m}$ geçerlidir. Elbette, çünkü $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisinin yakınsak herhangi bir alt dizisi, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisidir, neden? Dolayısı ile $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin herhangi bir yığılma noktası olan ℓ için $\underline{\lim}\ a_n \leq \ell$ geçerlidir. İstenen eşitsizlik hemen elde edilir.

1.3. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir gerçel sayıya yakınsıyorsa, herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\underline{\lim}\ (a_n + b_n) = \underline{\lim}\ a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ geçerlidir. Gerçekten $\ell_1 = \underline{\lim}\ a_n$ bir gerçel sayı ise, $\ell_1 = \lim_{m\to\infty} a_{n_m}$ gerçekleyen $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisini belirleyen $n_1 < n_2 < \cdots n_m < \cdots$ numaraları yardımı ile önce $\ell_2 = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{m\to\infty} b_{n_m}$ ve sonuçta $\ell_1 + \ell_2 = \lim(a_{n_m} + b_{n_m})$ gerçekleneceğinden, tanım gereği hemen, $\underline{\lim}\ (a_n + b_n) \leq \ell_1 + \ell_2$ bulunur. $\underline{\lim}\ (a_n + b_n) < \ell_1 + \ell_2$ gerçekleşemeyeceği kolayca görülür, çünkü aksi halde,

$$\lim_{m\to\infty} (a_{N_m} + b_{N_m}) = \underline{\lim}\ (a_n + b_n)$$

gerçekleyen yakınsak bir $\{a_{N_m} + b_{N_m}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi var olurdu ve sonuçta

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} a_{N_m} &= \lim_{m\to\infty} ((a_{N_m} + b_{N_m}) - b_{N_m}) \\
&= \underline{\lim}\ (a_n + b_n) - \lim_{m\to\infty} b_{N_m} \\
&= \underline{\lim}\ (a_n + b_n) - \ell_2 \\
&< \ell_1 \leq \lim_{m\to\infty} a_{N_m}
\end{aligned}$$

çelişkisi doğardı. $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$ halini okuyucuya bırakıyoruz.

1.4. Herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve herhangi $0 < \epsilon$ verildiğinde, $\forall\, n \geq N$ için $\underline{\lim}\ a_n - \epsilon < a_n$ gerçeklenir. Elbette, yine $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$ halini apaçık olduğundan irdelemeden geçiyoruz. Şimdi $\underline{\lim}\ a_n = \ell$ bir gerçel sayı iken, sözü edilen nitelikte bir N doğal sayısı tanımlanamasaydı, öncelikle öyle bir $1 < n_1$ doğal sayısı var olurdu ki $a_{n_1} \leq \ell - e$ geçerli olurdu. O halde yine öyle bir $2n_1 < n_2$ vardır ki $a_{n_2} \leq \ell - \epsilon$ olurdu, vb. Tümevarım ve bu düşünceler yardımı ile öyle bir $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi tanımlanabilirdi ki her bir $m \in \mathbb{N}$ için $a_{n_m} \leq \ell - \epsilon$ ve sonuçta

$$\inf\{a_{n_m}, a_{n_{m+1}}, a_{n_{m+2}}, \ldots\} \leq \ell - \epsilon$$

geçerli olurdu. Sonuçta

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}\ a_{n_m} &= \sup_m \inf\{a_{n_m}, a_{n_{m+1}}, a_{n_{m+2}}, \ldots\} \\
&\leq \ell - \epsilon < \ell \leq \underline{\lim}\ a_{n_m}
\end{aligned}$$

çelişkisi doğardı.

1.5. Herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için daima

$$\underline{\lim}\ a_n \leq \underline{\lim}\ \sigma_n \leq \overline{\lim} \sigma_n \leq \overline{\lim} a_n$$

geçerlidir. Biz yalnızca $\underline{\lim}\ a_n \leq \underline{\lim}\ \sigma_n$ eşitsizliğini gösterelim. $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$ hali apaçıktır. Şimdi $\ell = \underline{\lim}\ a_n$ bir gerçel sayı olsun. $0 < \epsilon$ yeterince küçük olsun. **1.4.** nedeniyle, uygun bir N sabit doğal sayısı sayesinde, $\forall\, n > N$ için $\ell - \epsilon < a_n$ geçerli olduğundan, sonuçta $n > N$ için

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{n} \\
&\quad + \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n}{n} \\
&> \frac{A}{n} + \frac{(n-N)(\ell - \epsilon)}{n} \\
&= \frac{A}{n} + (\ell - \epsilon)(1 - \frac{N}{n})
\end{aligned}$$

geçerli olur ve dolayısı ile **1.3.** yardımı ile, kolayca

$$\underline{\lim}\,\sigma_n \geq \underline{\lim}\left(\frac{A}{n}+(\ell-\epsilon)\left(1-\frac{N}{n}\right)\right)=\ell-\epsilon$$

bulunur; burada $A = a_1+a_2+\cdots+a_N$ yazılmıştır. Okuyucu, çok zorlanmadan

$$\forall\, n \geq N, \quad \alpha_n \leq \beta_n \quad \text{ise} \quad \underline{\lim}\,\alpha_n \leq \underline{\lim}\,\beta_n$$

olduğunu gösterebilir ve bunu yapmalıdır. O halde her bir pozitif ϵ için $\ell-\epsilon \leq \underline{\lim}\,\sigma_n$ olmaktadır. Bu ise, $\ell \leq \underline{\lim}\,\sigma_n$ demektir; aksi halde kaçınılmaz olarak $\underline{\lim}\,\sigma_n+\epsilon_0 < \ell-\epsilon_0$ gerçekleyen bir pozitif ϵ_0 var olurdu, neden?

1.6. Şimdi problemimizi çözelim. Şu diziyi tanımlayalım. $a_1 = 1, a_2 = -1$ ve her m doğal sayısı için

$$(*) \quad a_n = \begin{cases} 1, & 2^m < n \leq 2^m+2^{m-1}; \\ -1, & 2^m+2^{m-1} < n \leq 2^{m+1}. \end{cases}$$

Demek ki, $a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = a_6 = 1, a_7 = a_8 = -1, \ldots$ olmaktadır. Bu dizinin tastamam iki yığılma noktası olduğu halde, aritmetik ortalamalar dizisi $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ şunları gerçekler. Önce her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_{2^n} = 0$ olur, çünkü dikkat edilirse burada pay, yani $a_1+a_2+\cdots a_{2^n}$, önce $a_3+a_4+\cdots+a_{2^n}$ dir ve dolayısı ile

$$\sum_{k=1}^{n-1}\big((a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^k+2^{k-1}}) + (a_{2^k+2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^{k+1}})\big) = \sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}-2^{k-1}),$$

yani sıfırdır. Şimdi k sabit doğal sayısını alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma_{2^n+2^{n-k}} = \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2^n})}{2^n+2^{n-k}} + \frac{(a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\cdots+a_{2^n+2^{n-k}})}{2^n+2^{n-k}} = \frac{2^{n-k}}{2^{n-k}(1+2^k)} = \frac{1}{2^k+1}$$

olur, çünkü pay ifadesinde yer alan ilk parantez sıfırdır. İkinci parantez içinde toplam 2^{n-k} tane $+1$ vardır, çünkü bu ikinci parantezdeki tüm terimlerin numaraları apaçıktır ki $> 2^n$ ve üstelik $\leq 2^n+2^{n-1}$ gerçeklerler. Demek ki $(*)$ dizisinin aritmetik ortalamalar dizisinin,

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{2^k+1}, \ldots$$

değerlerini alan (ve dolayısı ile bu değerlere yakınsayan) birer sabit alt dizisi vardır. Peki $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin başka yığılma noktası var mıdır?

Problem 2. Şimdi de şu diziyi araştıralım: *Öyle sınırlı bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi tanımlayalım ki kendisi ve aritmetik ortalamalar dizisi arasında*

$$\underline{\lim}\,a_n < \underline{\lim}\,\sigma_n < \overline{\lim}\,\sigma_n < \overline{\lim}\,a_n$$

eşitsizlikleri geçerli olsun. İstenen nitelikte bir örneğin, yukarıda tanımlanan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi olduğunu okuyucu kolayca görecektir.

Problem 3. $[0,1)$ aralığındaki tüm x gerçel sayılarının tam kısımları $[x] = 0$ gerçekler. Bu sayıların herhangi birisinin $x = 0, x_1x_2x_3\cdots$ şeklinde, bir ve bir tek türlü belirlenmiş bir *2-tabanlı açılımı* vardır. Burada $x_1, x_2, \ldots$ tamsayıları, ya 0 ya 1 tamsayılarıdır; bunların belirli bir adımdan sonra hep 1 gitmelerini genelliği bozmaksızın yasaklayabiliriz. Vietoris 1921'de şu ilginç örneği önerdi:

$$f(0,x_1x_2x_3\ldots) = \overline{\lim}\,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

şeklinde tanımlanan $f : [0,1) \to [0,1)$ fonksiyonu, $0 < \epsilon < \delta < 1$ sayıları ne olursa olsun $f([\epsilon,\delta]) = [0,1[$ gerçekler; kısacası bu fonksiyon, tanım aralığındaki herhangi bir alt aralıkta, inanılmaz ve grafiği çizilemez bir biçimde süreksiz salınımlar yapmaktadır. Kanıtlamayı yine adım adım yapalım.

3.1. Herhangi bir $0 \leq r_0 = \frac{m_0}{n_0} < 1$ rasyonel sayısına karşılık $x_0 = 0,\overline{000\ldots011\ldots1} \in [0,1)$ şeklinde tanımlanan x_0 gerçel sayısı $f(x_0) = r_0$ gerçekler; burada virgülden sonraki ilk n_0-m_0 tane basamağın tümü 0, son m_0 tane basamağın tümü ise 1'dir ve x_0 sayısı, n_0 uzunluğundaki bu kalıbı sürekli tekrarlamaktadır. Dikkat edilirse basamakların aritmetik ortalamalar dizisinin

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n_0}}{n_0}, \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n_0}}{2n_0}, \ldots$$

terimlerinden oluşan alt dizisi r_0 rasyonel sayısına yakınsar, çünkü bu alt dizinin tüm terimleri zaten $\frac{m_0}{n_0} = r_0$ 'dır. Şimdi, doğal sayıların herhangi bir $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ artışı ile belirlenen $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisine bakalım. Her bir n_k için, $N_kn_0 \leq n_k < (N_k+1)n_0$ gerçekleyen ve tek türlü belirlenebilen bir N_k doğal sayısı vardır ve elbette

$$\begin{aligned}\sigma_{n_k} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_k}}{n_k} \\ &\leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{(N_k+1)n_0}}{N_k \cdot n_0} \\ &= \frac{(N_k + 1)m_0}{N_k \cdot n_0} = r_0\left(1 + \frac{1}{N_k}\right)\end{aligned}$$

nedeniyle, aritmetik ortalamalar dizisinin tüm diğer yakınsak alt dizilerinin limitleri $\leq r_0$ ve hatta $= r_0$ gerçekler, neden? Bu nedenle $f(x_0) = r_0$ olur.

3.2. Herhangi bir $0 < q < 1$ irrasyonel sayısına monoton artarak yakınsayan bir $r_k = \frac{m_k}{n_k}$ pozitif rasyonel sayılar dizisi vardır. Önce $0 < r_1 < q$ gerçekleyen r_1 rasyonel sayısını, sonra $\max\{r_1, (q - \frac{1}{2})\} < r_2 < q$ gerçekleyen r_2 rasyonel sayısını, sonra $\max\{r_2, (q - \frac{1}{3})\} < r_3 < q$ gerçekleyen r_3 sayısını, v.b., belirleriz. İstenen $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi tümevarımla tanımlanır. Bu dizinin paydalarında yer alan n_k doğal sayıları sonsuz tanedir. Sonlu tane olsalardı, sonsuz tane $r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots$ rasyonel sayısının paydasında aynı bir N doğal sayısı kullanılmış olurdu ki bu olanaksızdır, neden? Demek ki genelliği bozmaksızın, yukarıdaki dizinin paydalarının $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ gerçeklediğini varsayabiliriz, neden? O halde

$$m_k = n_k r_k < n_{k+1} r_k < n_{k+1} r_{k+1} = m_{k+1}$$

nedeniyle paylar da kesin bir monoton artış gösterirler. Şimdi $m_k - m_1 < n_k - n_1$ olacak şekilde bir k doğal sayısı bulalım. Tüm k indisleri için $n_k - n_1 \leq m_k - m_1$ olsaydı,

$$f - \frac{n_1}{n_k} \leq r_k - \frac{m_1}{n_k}$$

eşitsizlikleri bize $1 \leq q$ çelişkisini verirdi, neden? Bundan sonra $m_k - m_1 < n_k - n_1$ gerçekleyen k doğal sayılarının en küçüğüne k_2 ve sonra $m_k - m_{k_2} < n_k - n_{k_2}$ gerçekleyen k doğal sayılarının en küçüğüne k_3 diyelim v.b.. Tümevarımla öyle yeni bir $R_k = \frac{M_k}{N_k}$ pozitif rasyonel sayı dizisi tanımlayabiliriz ki, kesin monoton artarak q irrasyonel sayısına yakınsar; hem paylar, hem de paydalar kesin artarlar ve üstelik $M_k - M_{k-1} < N_k - N_{k-1}$ eşitsizlikleri her bir k indisi için geçerlidir. Şimdi

$$x_q = 0,\underbrace{000..011..1}\underbrace{000..011..1}\ldots$$

şeklinde tanımlanan x_q gerçel sayısını göz önüne alalım. İlk N_1 tane basamağın ilk $N_1 - M_1$ tanesi 0, son M_1 tanesi 1 dir, hemen ardından gelen $N_2 - N_1$ tane basamağın ilk $(N_2 - N_1) - (M_2 - M_1)$ tanesi 0 ve son $M_2 - M_1$ tanesi 1'dir, ardı sıra gelen $N_3 - N_2$ tane basamağın ilk $(N_3 - N_2) - (M_3 - M_2)$ tanesi 0 ve son $M_3 - M_2$ tanesi 1 dir v.b.. Okuyucu artık $f(x_q) = q$ gerçeklendiğini, tıpkı **3.1.**'deki gibi gösterebilir.

3.3. $(0, 1)$ aralığındaki 2-açılımlı herhangi bir $x = 0, x_1x_2x_3\cdots$ sayısı ve herhangi bir sabit N doğal sayısı verilsin. $a_1, a_2, \ldots, a_N$ tam sayıları gelişi güzel 0 ve 1'ler olmak üzere

$$f(0, a_1a_2\cdots a_N x_1x_2x_3\cdots) = f(x)$$

geçerli olur, çünkü her bir $n > N$ için, yeni tanımlanan gerçel sayının basamak ortalamaları

$$\begin{aligned}&\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-N}}{n} \\ &= \frac{A}{n} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ &\quad - \frac{x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \cdots + x_n}{n}\end{aligned}$$

gerçekler; burada $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$ yazılmıştır ve

$$0 \leq x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \cdots + x_n \leq N$$

gerçeklendiğinden (neden?),

$$\xi_n = \frac{A}{n} - \frac{x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \cdots + x_n}{n}$$

dizisi sıfıra yakınsar. Sonuçta $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsak bir dizi olmak üzere, **1.3.**'ün benzeri olan

$$\overline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) = \overline{\lim}\, \alpha_n + \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

bilgisi kullanılarak istenen iddia elde edilir.

3.4. $(0, 1)$ aralığında, 2-tabanlı açılımları

$$x = 0, x_1x_2x_3\cdots \quad \text{ve} \quad y = 0, y_1y_2y_3\cdots$$

olan her hangi iki gerçel sayının $x < y$ gerçekleyebilmesi için gerek ve yeter koşul, ilk farklı basamaklar olan $x_m \neq y_m$ için $x_m < y_m$ gerçeklenmesidir. Örneğin

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots, x_{m-1} = y_{m-1}$$

ve

$$x_m = 0 < 1 = y_m$$

ise,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{0}{2^m} + \sum_{k>m} \frac{x_k}{2^k} \\ &< \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots \right) \\ &= \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{1}{2^m} = \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{y_m}{2^m} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = y \end{aligned}$$

elde edilir. Hem gerek, hem yeter koşul gösterilmiş oldu, neden? Burada x'in $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ basamaklarının tümünün 1 olmadığını söyleyen bilginin kullanıldığına dikkat ediyor muyuz? Bu sonuç bir bakıma, *göstergebilim* sözcüğünün, sözlükte *göstergesiz* sözcüğünden önce gelmesine benzemektedir; ilk farkeden harf de (basamakta) alfabetik sıralama gözönüne alındığında $b < s$ olmaktadır.

3.5. Şimdi yeterince küçük pozitif $\epsilon < \delta$ sayıları verilsin. $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta - \epsilon}{2}$ gerçekleyen bir m doğal sayısı belirlensin.

$$\frac{0}{2^m}, \frac{1}{2^m}, \ldots, \frac{k}{2^m}, \ldots, \frac{2^m - 1}{2^m}, \frac{2^m}{2^m}$$

kesirli sayılarından ardışık iki tanesi

$$\epsilon < \frac{k}{2^m} < \frac{k+1}{2^m} < \delta$$

gerçekler, çünkü dikkat edilirse,

$$\frac{k-1}{2^m} \le \epsilon < \frac{k}{2^m}$$

gerçeklenecek biçimde tek bir $k < 2^m$ vardır (neden?) ve üstelik $\delta \le \frac{k+1}{2^m}$ olamaz, neden? O halde

$$f\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right) = [0,1)$$

gösterebilirsek, $f([\epsilon, \delta]) = [0,1)$ sonucu kolayca elde edilir. Bu sonuncuyu göstermek ise çok kolaydır. k tam sayısının, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tam sayıları 0 ya da 1 olmak üzere,

$$k = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \cdots + a_m 2^m$$

biçiminde tek türlü yazılabildiğini bildiğimizden, $\frac{k}{2^m}$ kesirli sayısının 2-tabanlı açılımı

$$\frac{k}{2^m} = 0,\ a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_0 000 \cdots$$

olur. Benzer biçimde

$$\frac{k+1}{2^m} = 0,\ b_m b_{m-1} \cdots b_0 000 \cdots$$

ve üstelik

$$0, a_m a_{m-1} \cdots a_0 00 \cdots < 0, b_m b_{m-1} \cdots b_0 00 \cdots$$

geçerlidir. Şimdi **3.1.**'de tanımlanan x_0 gerçel sayısının açılımı $x_0 = 0, x_{01} x_{02} x_{03} \ldots$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2^m} &< x^* = 0, a_m a_{m-1} \cdots a_0 1 x_{01} x_{02} x_{03} \cdots \\ &< \frac{k+1}{2^m} \end{aligned}$$

ve üstelik **3.3.** nedeniyle $f(x^*) = r_0$ olacağı apaçıktır. Aynen, $f(x_q^*) = q$ ve

$$\frac{k}{2^m} < x_q^* < \frac{k+1}{2^m}$$

gerçekleyen x_q^* gerçel sayısı da **3.2.**'deki x_q yardımıyla tanımlanır. Bitti!

Problem 4. Şu iddia kuşkusuz çok şaşırtıcıdır: *Herhangi bir pozitif terimli* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi için*

$$\overline{\lim} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \ge e$$

gerçeklenir. Dikkat: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir gerçel sayıya yakınsarsa bu üst limit $+\infty$ 'dur. Örneğin $\lim a_n = a > 0$ ise, uygun bir $N_1 \in \mathbb{N}$ sayesinde, $n \ge N_1$ için

$$(1+\epsilon)^n < (A-\epsilon)^n < \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n$$

gerçeklenir, çünkü $a_1 > 0$ ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 + a}{a} = A > 1$$

nedeniyle uygun bir $0 < \epsilon$ sayesinde $1 + \epsilon < A - \epsilon$ olur. Eğer $\lim a_n = 0$ ise, $n \ge N_2$ için bu kez

$$2 < \frac{a_1}{a_n} < \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}$$

olur. Şimdi okuyucu, genel halde bu problem yerine, onun eşdeğeri olan

$$\begin{aligned} &\overline{\lim} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \overline{\lim} \left(\frac{n(a_1 + a_{n+1})}{(n+1) a_n} \right)^n \ge 1 \end{aligned}$$

eşitsizliğini göstermeye çalışmalıdır. Bu problemin güzel bir çözümü için, Türk Matematik Derneği yayınlarından No:29, *Matematikte Endüksiyon ve Benzetme*, G. Polya, Cilt 1, 1966, (Çeviren: Orhan İçen) s.131'e başvurulabilir.